Функциональная модель непрерывных интервальных округлений.

А.Л. Крюкова
Вологодский государственный педагогический университет
e-mail: kryukovanastya@yahoo.com

Мы рассматриваем интервальные округления в частично упорядоченных топологических пространствах. В данной работе строится функциональная модель непрерывных интервальных округлений.

В частично упорядоченном пространстве $(X, \leq)$ будем рассматривать и обозначать $IE\,(X)$ совокупность отображений φ пространства X в себя, для которых выполнены условия: $(\forall x \in X)\,(x \leq \varphi\,(x))$ и $(\forall\, x_1,\, x_2 \in X)\,(x_1 \leq x_2 \Rightarrow \varphi\,(x_1) \leq \varphi\,(x_2))$.

Определение. Отображение $\varphi \in IE(X)$ называется округлением (или замыканием [1]), если оно идемпотентно, т. е. удовлетворяет условию $\varphi\,(\varphi\,(x)) = \varphi\,(x)$.

Определение. Множество точек $x \in X$, для которых $\varphi\,(x) = x$, будем называть множеством неподвижных точек округления φ и обозначать E_φ.

Теорема 1. Если в пространстве X любое его ограниченное снизу подмножество имеет точную нижнюю грань, то множество неподвижных точек полностью определяет округление.

Эта теорема позволяет сводить классификацию округлений к классификации множеств их неподвижных точек, что весьма удобно.

Процедура интервализации [2] сопоставляет любому упорядоченному пространству $(X, \leq)$ новое пространство $Int(X)$, состоящее из пар $(x, y) \in X \times X$, таких что $x \leq y$. Порядок на $Int(X)$ вводится правилом $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$, если $x_2 \leq x_1, y_1 \leq y_2$. Будем записывать элементы из $Int(X)$ в форме $[x, y]$, вместо (x, y).

Определение. Округления на упорядоченном пространстве $Int(X)$ называются интервальными округлениями на $(X, \leq)$.

Далее мы рассматриваем только классические интервальные округления [3, 4], т. е. случай, когда X – действительная прямая R. Элементы $Int(X)$ в этом случае представляют собой замкнутые интервалы.

Естественно отождествлять интервал $[a, b]$ с точкой (a, b) координатной плоскости и в этом смысле говорить, например, о проекциях какого-то множества интервалов. Пусть φ – какое-нибудь округление на $Int(R)$, E_φ – множество его неподвижных точек. Обозначим через A и B проекции E_φ на оси X и Y. Для любого $x \in A$ положим $\alpha(x) = \sup\{y : (x, y) \in E_\varphi\}$, а для $y \in B$ – $\beta(y) = \inf\{x : (x, y) \in E_\varphi\}$. При этом функции α и β могут принимать значения $+\infty$ и, соответственно, $-\infty$.

Множества A, B и функции α, β (вместе с дополнительной информацией о достижении экстремумов) полностью определяют округление.

Теорема 2.

(i) Множество A (множество B) является неограниченным снизу (сверху).

(ii) Функция α (функция β) является неограниченной сверху (снизу) на любом множестве вида $\{x \in A : x < a\}$ ($\{y \in B : y > b\}$).

(iii) $\alpha(x) \geq x$, $\beta(y) \leq y$.

(iv) Если $(\beta(y), y) \in E_\varphi$, то $\alpha(\beta(y)) \geq y$; если $(x, \alpha(x)) \in E_\varphi$, то $\beta(\alpha(x)) \leq x$.

Обратно, всякий набор $\chi = (A, B, \alpha, \beta)$, удовлетворяющий условиям (i) – (iv), задает множество неподвижных точек некоторого интервального округления.

Определение. Набор $\chi = (A, B, \alpha, \beta)$, соответствующий округлению φ, называется его функциональной моделью.

Если округление φ непрерывно, то его функциональную модель можно существенно упростить. В этом случае образ множества интервалов (гомеоморфного полуплоскости) связен. Но для идемпотентного отображения образ совпадает с можеством неподвижных точек. Следовательно, множество E_φ связно для любого непрерывного округления φ.

Проекция A множества E_φ на ось X – образ связного множества при непрерывном отображении. Следовательно, A – связное подмножество прямой. Так как оно неограниченно снизу и замкнуто, то $A = (-\infty, a]$ для некоторого $a \in R$. Аналогично $B = [b, +\infty)$ для некоторого $b \in R$.

Лемма 3. Пусть φ – непрерывное округление, тогда пересечение E_φ с любой вертикальной, или горизонтальной прямой связно.

Доказательство. Пусть $M\,(x_0, y_0)$ и $N\,(x_0, y_1)$ принадлежат E_φ, и пусть $y_1 > y_0$. Докажем, что весь отрезок MN лежит в E_φ. Если это неверно, то множество $MN \setminus (MN \bigcap E)$ открытое в отрезке MN, имеет некий интервал смежности. Значит, найдутся точки $(x_0,\, y_3)$, $(x_0,\, y_4) \in E_\varphi$ такие, что между ними ни одна точка не содержится. Выберем $\varepsilon < (y_4 - y_3)$, тогда существует такое δ, что если $y \in (y_3,\, y_3 + \delta)$, то $\varphi\,(x_0,\, y) = (z,\ t)$ отстоит от $(x_0,\, y_3)$ меньше чем на ε. Это значит, что $t \in (y_3, y_4)$. Так как z меньше x_0, то $\inf\left\{(z,\ t)\,,\,(x_0,\, y_4)\right\} = (x_0,\ t)$. Следовательно, E_φ содержит точки между $(x_0,\, y_3)$ и $(x_0,\, y_4)$, а это противоречие.

Введем функции $\gamma(x) = \inf\{y : (x, y) \in E_\varphi\}$, $\quad \delta(y) = \sup\{x : (x, y) \in E_\varphi\}$. В силу замкнутости E_φ, имеем $(x, \gamma(x)) \in E_\varphi$, откуда $x \leq \delta(\gamma(x))$. Аналогично доказывается, что $y \geq \gamma(\delta(y))$.

Лемма 4.

(а) Функции γ и δ являются невозрастающими и непрерывными,

(б) E_φ состоит из всех точек (x, y), удовлетворяющих неравенствам $y \geq \gamma(x)$, $x \leq \delta(y)$.

Доказательство.

(а): Предположим, что $\gamma\,(x_1) < \gamma\,(x_2)$ для некоторых $x_1 < x_2$ из A. Так как функция γ неограничена сверху на $(-\infty,\, x_1]$, то найдется число $x_0 < x_1$ такое, что $\gamma\,(x_0) > \gamma\,(x_2)$. Так как $\gamma\,(x_2) < \gamma\,(x_0)$ и $\delta\,(\gamma\,(x_2)) \geq x_2 > x_0$, то точка $(x_0,\ \gamma\,(x_2))$ принадлежит E_φ. По лемме 3, пересечение множества E_φ с прямой $y = \gamma\,(x_2)$ связно. Так как оно содержит точки $(x_0,\ \gamma\,(x_2))$ и $(x_2,\ \gamma\,(x_2))$, то содержит и точки $(x_1,\ \gamma\,(x_2))$. Но это невозможно, поскольку $\gamma\,(x_2) > \gamma\,(x_1)$. Полученное противоречие доказывает монотонность (невозрастание) функции γ. Монотонность δ доказывается аналогично.

Предположим, что функция γ терпит разрыв в точке x_0, то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \gamma\,(x) = a > b = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \gamma\,(x)$. Точки $(x_0,\, a)$ и $(x_0,\, b)$ принадлежат множеству E_φ, так как оно замкнуто. Для любого $x < x_0$ точка $(x,\, b)$ не содержится в E_φ; из всех мажорирующих её точек множества E_φ наименьшей является $(x,\ \gamma\,(x))$. Поэтому $\varphi\,(x,\, b) = (x,\, \gamma\,(x))$. Следовательно при $x \to x_0$ имеем $(x,\, b) \to (x_0,\, b)$, $\varphi\,(x,\, b) \to (x_0,\, a) \neq (x_0,\, b) = \varphi\,(x_0,\, b)$, что противоречит непрерывности φ. Значит, что функция γ – непрерывна. Аналогично доказывается непрерывность функции δ.

(б): Пусть $y \geq \gamma(x)$, $x \leq \delta(y)$ и пусть $\varphi(x, y) = (x_1, y_1)$, тогда $x_1 \leq x$, $y_1 \geq y$. Обозначим через M горизонтальную прямую, проходящую через (x, y). Если $\gamma(x_1) \leq y$, то пересечение E_φ с вертикальной прямой, проходящей через (x_1, y_1), содержит точку (x_1, y). Так как $x_1 < x < \delta(y)$, то отрезок $E_\varphi \bigcap M$ содержит (x, y), что и требуется.

Если $\gamma(x_1) > y$, то поскольку $\gamma(x) \leq y$, а функция γ непрерывна, на отрезке $[x_1, x]$ найдётся точка x_2, для $\gamma(x_2) = y$. Тогда отрезок $E \bigcap M$ содержит точки (x_2, y), $(\delta(y), y)$, а потому и (x, y). Итак, в обоих случаях $(x, y) \in M$.

Теперь мы можем построить функциональную модель непрерывного интервального округления.

Теорема 5. Непрерывное округление можно задавать равенством $E_\varphi = \{(x, y) : y \geq \gamma(x), x \leq \delta(y)\}$, выбирая произвольные числа a, b и непрерывные невозрастающие функции γ, δ на $(-\infty, a]$ и $[b, +\infty)$, удовлетворяющие условиям: а) $\delta(\gamma(x)) \geq x$; $\gamma(\delta(y)) \leq y$, б) $\lim_{x \to -\infty} \gamma(x) = +\infty$.

Список литературы

[1] Биркгофф Г. Теория структур. М.: Издательство иностранной литературы, 1952. 408 с.

[2] Литвинов Г.Л. Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение // arXiv: math.GM / 0507014 v1 1 july 2005.

[3] Kaminsky T.E., Kreinovich V. Natural requirements for natural roundings lead to a hardware-independent characterization of standard rounding procedures // Notes on intuitionistic fuzzy sets. 1998. Vol. II, N 3. P. 57–64.

[4] Каминский Т.Э. К теории интервальных округлений // Исследования по математическому анализу и методике преподавания математики./ Вологда: Русь, 2000. С.23–36.