

# Семейство новых математических моделей для описания слабонелинейных планарных волн на границах неглубоких слоев жидкостей\*

Д. Г. АРХИПОВ<sup>1,2</sup>, Н. С. САФАРОВА<sup>1</sup>, Г. А. ХАБАХПАШЕВ<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, Россия

e-mail: theory@itp.nsc.ru

В докладе представлен обзор семейства оригинальных систем уравнений в частных производных для моделирования трансформации умеренно длинных пространственных волн малой, но конечной амплитуды на границах слоев жидкостей. Эти модели содержат одно основное нелинейное эволюционное уравнение и несколько простых вспомогательных линейных уравнений. Последние необходимы для нахождения величин, входящих лишь в члены второго порядка малости главного уравнения (например, вектора горизонтальной скорости частиц жидкости).

*Ключевые слова:* взаимодействие возмущений, граница раздела, двухслойная жидкость, длинные волны, моделирование, неглубокие слои, нелинейные волны, однородная жидкость, пологое дно, свободная поверхность, солитон, стационарный поток, столкновение волн, трехмерные возмущения, эволюция.

Изучению длинных волн на свободных границах слоев жидкостей посвящено очень много работ (см. литературу, цитируемую в монографиях [1]–[8]). В последнее время наибольший интерес исследователей вызывают планарные нелинейно-дисперсионные модели. Описание даже слабонелинейных пространственных волн, одновременно бегущих в различные стороны, возможно только с помощью систем уравнений, содержащих как возмущения свободной поверхности, так и скорость среды (например, [9, 10]). В таких системах все уравнения содержат не только линейные, но и нелинейные слагаемые.

В работе [11] предложен новый подход для моделирования возмущений поверхности первоначально покоящейся неглубокой жидкости, использующий основные достоинства известных моделей и в то же время свободный от некоторых их недостатков. Этот подход заключается в выводе одного нелинейно-дисперсионного уравнения для существенно трехмерного возмущения поверхности жидкости и нескольких простых линейных вспомогательных уравнений, определяющих векторы скорости частиц среды, которые входят лишь в члены второго порядка малости главного уравнения.

В данном докладе рассмотрены несколько задач и соответствующие им модельные системы дифференциальных уравнений: 1) волны на свободной поверхности неглубокого слоя однородной жидкости над пологим дном [11, 12]; 2) возмущения границы раздела двухслойной жидкости со слабонаклонным дном и крышкой; 3) внутренние волны в водоемах со скачком плотности [13]; 4) возмущения границы раздела двух

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах № 11.G34.31.0035

©Д. Г. Архипов, Н. С. Сафарова, Г. А. Хабахпашев, 2011

слоев жидкостей в горизонтальном канале при наличии стационарного сдвигового течения [14]. С помощью численных экспериментов исследована динамика различных процессов взаимодействия нелинейных волн. При этом возмущения были как протяженными, так и уединенными в пространстве.

## 1. Волны на свободной поверхности слоя однородной жидкости

Благодаря тому, что скорость распространения гравитационных возмущений много меньше скорости звука в среде, используем приближение несжимаемости жидкости. Кроме того, считаем, что стационарные составляющие течения жидкости равны нулю, а возникающее движение потенциально; "длина волны"  $\lambda$  существенно больше, а амплитуда возмущения  $\eta_a$  значительно меньше равновесной глубины слоя  $h$  ( $h/\lambda \sim \varepsilon^{1/2}$ ,  $\eta_a/h \sim \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр); капиллярные эффекты не велики (число Бонда  $Bo = \rho g h^2 / \sigma > 1$ , здесь  $\rho$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения, а  $\sigma$  – поверхностное натяжение); неподвижное дно является слабонаклонным ( $\nabla h \sim \varepsilon^{3/2}$ ).

В результате преобразований, описанных в статьях [11, 12], получена модельная система уравнений для возмущения свободной поверхности  $\eta$ , вектора горизонтальной компоненты скорости жидкости, осредненного по глубине слоя,  $\langle \mathbf{u} \rangle$  и потенциала  $\varphi$ :

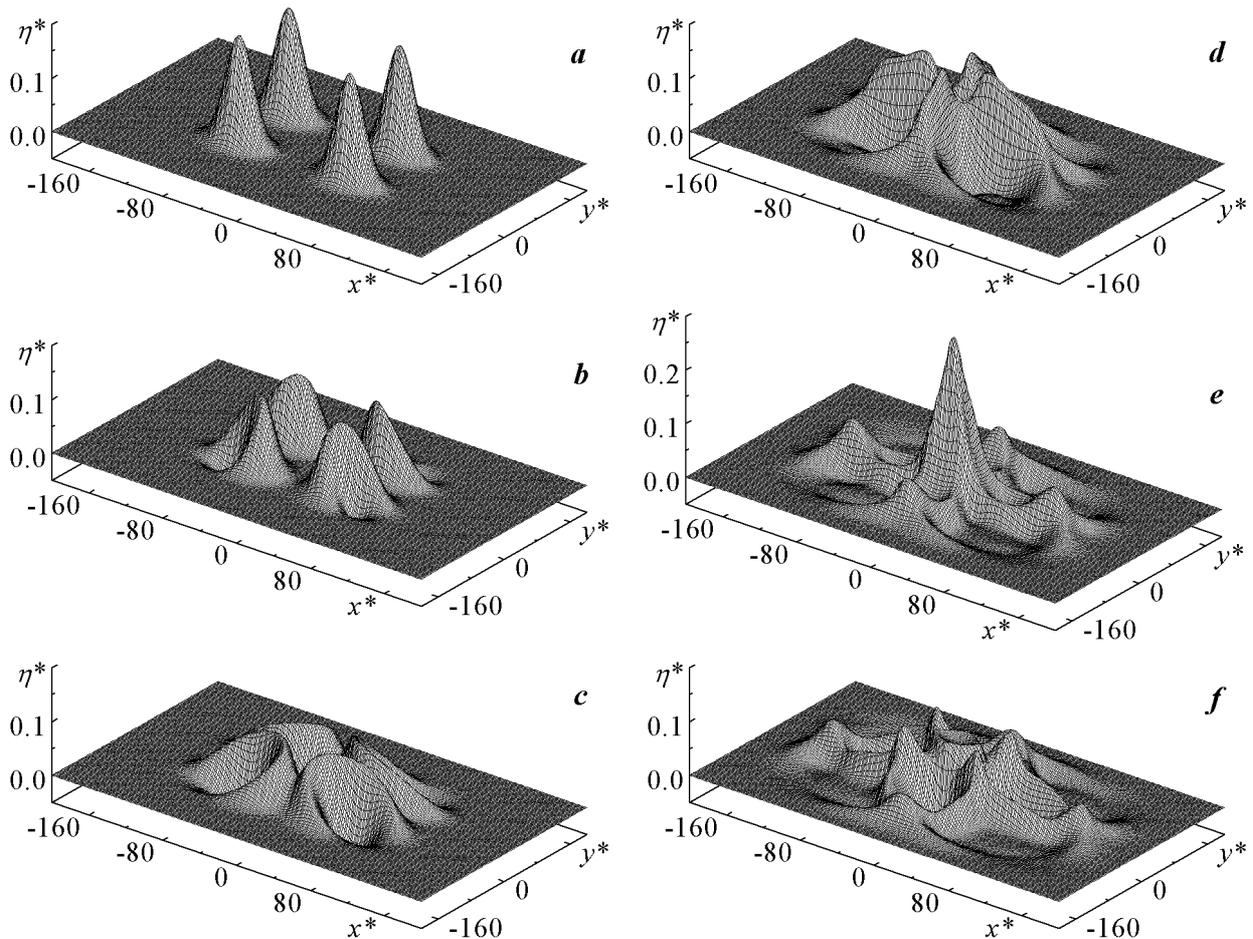


Рис. 1. Формы свободной поверхности ( $\eta^* = \eta/h$ ,  $x^* = x/h$ ,  $y^* = y/h$ ) при столкновении возмущений в шесть моментов времени:  $t^* = t\sqrt{g/h} = 0$  (a), 17 (b), 34 (c), 51 (d), 68 (e), 85 (f)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \nabla^2 \eta - \frac{g}{2} \nabla^2 (\eta^2) - h \nabla^2 (\langle \mathbf{u} \rangle^2) - \frac{h^2}{3} \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \nabla h \cdot \nabla \eta, \quad (1)$$

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \nabla \varphi, \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{1}{h} \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

где  $t$  – время, а оператор  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ . Данная модель удобнее для анализа, чем известные системы дифференциальных уравнений (например, [9, 10]).

Решение итоговой системы алгебраических уравнений, возникшей после разностной аппроксимации основного уравнения (1), проводилось с использованием итерационного метода Зейделя, а уравнение Пуассона решалось с помощью метода быстрого преобразования Фурье по обеим горизонтальным координатам. В качестве примера на рис. 1 продемонстрировано взаимодействие четырех уединенных колоколообразных возмущений, которые в начальный момент времени двигались в центр расчетной области.

## 2. Возмущения границы раздела двух покоящихся жидкостей

В задаче о распространении умеренно длинных нелинейных внутренних волн в двухслойной жидкости (произвольных плотностей) слабонаклонными предполагаются и дно, и крышка. В итоге трансформаций, подобных тем, что представлены в статье [13], система гидродинамических уравнений сведена к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \eta - C_n \nabla^2 (\eta^2) - \frac{h_1 h_2}{\chi} [\rho_2 \nabla^2 (\langle \mathbf{u}_2 \rangle^2) - \rho_1 \nabla^2 (\langle \mathbf{u}_1 \rangle^2)] - C_d \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} =$$

$$= (C_{b1} \nabla h_1 + C_{b2} \nabla h_2) \cdot \nabla \eta, \quad \mathbf{u}_l = \nabla \varphi_l, \quad \nabla^2 \varphi_l = \frac{(-1)^{l+1}}{h_l} \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (2)$$

Здесь  $\eta$  – отклонение границы раздела, коэффициенты при всех членах ( $c_0^2$ ,  $C_n$ ,  $C_d$ ,  $C_{bl}$ ) зависят только от геометрических ( $h_1$ ,  $h_2$ ) и физических ( $g$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\sigma$ ) параметров задачи, а индекс  $l$  равен единице для верхней жидкости и двойке для нижней.

На рис. 2 показано слабое нелинейное увеличение возмущения при встречном столкновении двух одинаковых плоских уединенных волн (амплитуда примерно на 3 % превосходит сумму амплитуд исходных возмущений) и практически полная остановка жидкостей в момент максимального взаимодействия волн. В дальнейшем уединенные возмущения снова разбегаются и возвращаются к своим исходным амплитудам.

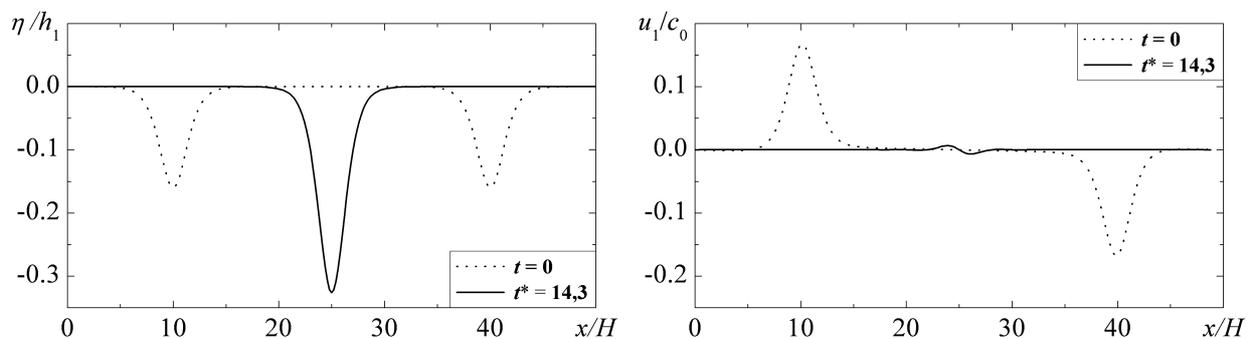


Рис. 2. Профили уединенных волн (слева – возмущения границы раздела, справа – скорости верхней жидкости) при  $\rho_1/\rho_2 = 0.8$  и  $h_1/h_2 = 1/3$  в различные моменты времени ( $t^* = t/c_0$ )

### 3. Внутренние волны в покоящихся водоемах с пикноклином

В этой задаче скачок плотности предполагается малым, а верхняя граница горизонтальной. В итоге преобразований, описанных в статье [13], исходная система гидродинамических уравнений сведена к следующей модельной системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \eta - c_0^2 \frac{h_1 - h_2}{2h_1 h_2} \nabla^2 (\eta^2) - \frac{h_1 h_2}{H} \nabla^2 (\langle \mathbf{u}_2 \rangle^2 - \langle \mathbf{u}_1 \rangle^2) - \frac{h_1 h_2}{3} \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \\ = \frac{c_0^2 h_1}{h_2 H} \nabla h_2 \cdot \nabla \eta, \quad \mathbf{u}_l = \nabla \varphi_l, \quad \nabla^2 \varphi_l = \frac{(-1)^{l+1}}{h_l} \frac{\partial \eta}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\eta$  – возмущение пикноклина, а  $H = h_1 + h_2$ . Эта модель принципиально проще известных систем уравнений (например, [15]), в которых все уравнения содержат скорости частиц слоев как в линейных, так и в нелинейных слагаемых.

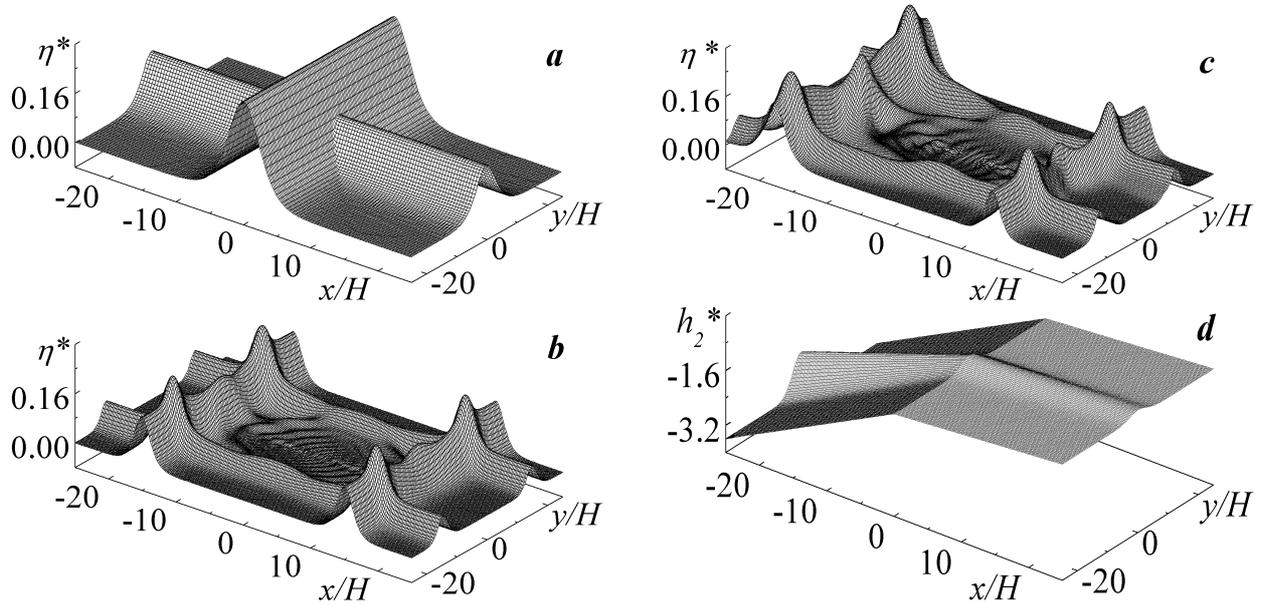


Рис. 3. Трансформация ( $a - t = 0$ ,  $b$  и  $c - t^* = 14$ ) первоначально крестообразного возмущения ( $\eta^* = \eta/h_{20}$ ) над горизонтальным дном ( $b$ ), над склоном с изломом и подводным хребтом ( $c$ ) при  $\rho_1/\rho_2 = 0.98$  и  $h_1/h_{20} = 3$ , где  $h_{20} = h_2(0, 8H)$ , а также форма дна  $h_2^* = -h_2/h_{20}$  ( $d$ )

На рис. 3 показана эволюция возмущения, имевшего в начальный момент времени форму креста. Видно, что образуются четыре квазиплоские волны, бегущие во все четыре стороны. Четыре пика возмущения пикноклина имеют место на пересечениях этих волн. Рисунок 3с демонстрирует слабое снижение скорости распространения и амплитуды таких возмущений при переходе на меньшую глубину воды и, наоборот, небольшое возрастание их скорости и амплитуды при увеличении толщины слоя жидкости по сравнению со случаем горизонтального дна. Наблюдаются и еще два пика во фронтах двух квазиплоских возмущений, которые бегут вдоль подводного хребта.

### 4. Возмущения границы раздела двух стационарных течений

В данной задаче крышка и дно канала горизонтальны, а внутри каждого слоя неизменны вектора скорости установившихся потоков  $\mathbf{U}_l$ . В результате трансформаций,

представленных в статье [14], получена следующая модельная система уравнений для возмущения границы раздела  $\eta$ , векторов горизонтальных компонент скоростей жидкостей, осредненных по глубинам слоев,  $\langle \mathbf{u}_l \rangle$ , их потенциалов  $\varphi_l$  и той части градиента давления на границе раздела слоев, которая связана со стационарными течениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \eta + 2(\mathbf{U}_{12} + \mathbf{U}_{21}) \cdot \nabla \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_f^2 \eta - \frac{\alpha}{2} \nabla^2 \eta^2 - \frac{h_1 h_2}{\chi} \nabla^2 (\rho_2 \langle \mathbf{u}_2 \rangle^2 - \rho_1 \langle \mathbf{u}_1 \rangle^2) - \\ - \frac{H}{\chi} \nabla \cdot (\eta \nabla p_f) - \beta \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - 2\mathbf{f}_\beta \cdot \nabla \nabla^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla_{f\beta}^2 \nabla^2 \eta + \sigma \frac{h_1 h_2}{\chi} \nabla^2 \nabla^2 \eta = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\nabla^2 \varphi_l = \frac{(-1)^{l+1}}{h_l} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{U}_l \cdot \nabla) \eta \right), \quad \langle \mathbf{u}_l \rangle = \nabla \varphi_l,$$

$$\nabla^2 p_f = \frac{\rho_1 \rho_2}{\chi} \left( 2(\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1) \nabla \frac{\partial \eta}{\partial t} + [(\mathbf{U}_2 \cdot \nabla)^2 - (\mathbf{U}_1 \cdot \nabla)^2] \eta \right).$$

Здесь  $\chi = \rho_1 h_2 + \rho_2 h_1$ , величины  $\mathbf{U}_{12}$ ,  $\mathbf{U}_{21}$  и  $\mathbf{f}_\beta$  зависят от  $\mathbf{U}_l$ , а операторы  $\nabla_f^2$  и  $\nabla_{f\beta}^2$  содержат еще и оператор  $\nabla$ . При отсутствии установившихся течений в обоих слоях система уравнений (4) согласуется с моделью (2), если в последней пренебречь наклоном крышки и дна.

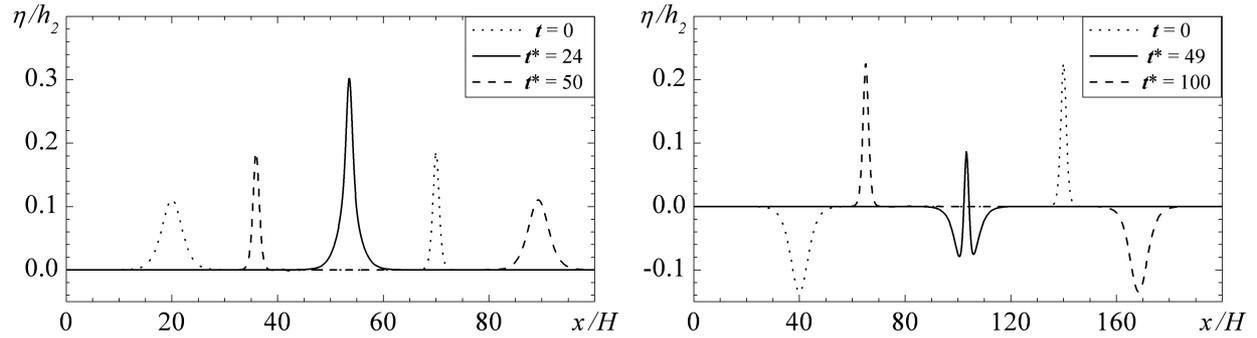


Рис. 4. Эволюция двух солитонов одной полярности (слева) и разной полярности (справа) при их столкновении (значения параметров расчета:  $\rho_1/\rho_2 = 0.8$  и  $U_2 = 0.5$  – в обоих случаях,  $h_1/h_2 = 2.7$  и  $\text{Bo}_i = (\rho_2 - \rho_1) g h_1 h_2 / \sigma = 11$  – слева,  $h_1/h_2 = 1.26$  и  $\text{Bo}_i = 51$  – справа)

На рис. 4 показаны профили границы раздела при "лобвом" столкновении двух плоских уединенных волн. При этом возмущения были не только одинаковой, но и различной полярности. В первом случае в момент наибольшего взаимодействия солитонов (при  $t^* = 24$ ) максимальная величина отклонения немного больше суммы амплитуд исходных волн. Во втором случае в аналогичный момент времени (при  $t^* = 49$ ) наблюдается знакопеременное возмущение, поскольку начальная амплитуда солитона "впадина" меньше, а ширина, наоборот, больше, чем аналогичные параметры солитона "бугор". Вычисления проведены для тех же значений параметров задачи, при которых были выполнены эксперименты [16, 17] по распространению волн против потоков.

## 5. Заключение

Предложено семейство комбинированных моделей, которые состоят из одного основного нелинейного эволюционного уравнения для возмущения границы раздела и нескольких

простых вспомогательных линейных уравнений. Последние необходимы для нахождения векторов горизонтальных скоростей жидкостей, а в последней задаче и вклада в градиент давления на границе раздела, связанного со стационарными течениями, входящих лишь в члены второго порядка малости главного уравнения. Численные эксперименты подтвердили пригодность представленного подхода для решения ряда характерных плоских и пространственных задач динамики нелинейных волн.

## Список литературы

- [1] УИЗЕМ ДЖ. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1976.
- [2] Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов, В. Ю. Ляпидевский, П. И. Плотников, И. В. Стурова, В. И. Букреев, В. А. Владимиров. Новосибирск: Наука, 1985.
- [3] Вычислительный эксперимент в проблеме цунами / Ю. И. Шокин, Л. Б. Чубаров, Ан. Г. Марчук, К. В. Симонов. Новосибирск: Наука, 1989.
- [4] Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1996.
- [5] Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
- [6] Численное моделирование течений с поверхностными волнами / Г. С. Хакимзянов, Ю. И. Шокин, В. Б. Баракнин, Н. Ю. Шокина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
- [7] Островский Л. А., Потапов А. И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003.
- [8] Шамин Р. В. Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008.
- [9] PEREGRINE D. H. Long waves on a beach // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 27, No. 4. P. 815–827.
- [10] КАРПМАН В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах, М.: Наука, 1973.
- [11] АРХИПОВ Д. Г., ХАБАХПАШЕВ Г. А. Новый подход к описанию пространственных нелинейных волн в диспергирующих средах // Докл. Акад. наук. 2006. Т. 409, № 4. С. 476–480.
- [12] ARKHIPOV D.G., KHAVAKHPASHEV G.A., SAFAROVA N.S. Combined approach to numerical simulation of spatial nonlinear waves in shallow water with various bottom topography // Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. 2011. Vol. 115. P. 297–312.
- [13] АРХИПОВ Д. Г., САФАРОВА Н. С., ХАБАХПАШЕВ Г. А. Моделирование нелинейных пространственных внутренних волн в морях и океанах со скачком плотности и пологим дном // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2009. Т. 2, № 2. С. 67–76.
- [14] АРХИПОВ Д. Г., САФАРОВА Н. С., ХАБАХПАШЕВ Г. А. Моделирование умеренно длинных нелинейных пространственных волн на границе двух жидких потоков в горизонтальном канале // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16, № 1. С. 3–17.
- [15] SNOI W., SAMASSA R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. 1999. V. 396. P. 1–36.
- [16] БУКРЕЕВ В. И., ГАВРИЛОВ Н. В. Экспериментальное исследование уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // ПМТФ. 1983. Т. 24, № 5. С. 51–56.
- [17] ГАВРИЛОВ Н. В. Уединенные внутренние волны большой амплитуды в двухслойной жидкости // ПМТФ. 1986. Т. 27, № 5. С. 49–54.