Численное моделирование безударного сильного сжатия специальных объемов газа

А.В. Рощупкин
Уральский государственный университет путей сообщения
e-mail: alex@eleview.com

В работе рассмотрено численное моделирование процессов безударного сжатия идеального политропного газа в случае когда и сжимаемый и сжатый объем газа находится в состояние покоя. Расчеты ведутся как в обратном так и в прямом направлении изменения времени. В проведенных расчетах получена степень сжатия газа в 10^3 – 10^4 раз.

Введение.

Задача о безударном сильном сжатии идеального газа до любой наперед заданной конечной плотности интересна в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза. Под термином «безударное» здесь понимается, что все рассматриваемые течения газа должны отделяться друг от друга только слабыми разрывами, но не ударными волнами.

Среди решений этой задачи можно выделить класс решений, предложенных А.Н. Крайко в работах [1-5].

В пространстве физических переменных r, t будем рассматривать одномерные изэнтропические течения, возникающие в политропном газе с уравнением состояния $p = \rho^\gamma/\gamma$. Рассматриваемые течения являются решениями системы уравнений газовой динамики

$$\begin{cases} c_t + uc_r + \dfrac{(\gamma-1)}{2} c\left(u_r + \dfrac{\nu u}{r}\right) = 0, \\ u_t + \dfrac{2}{(\gamma-1)} cc_r + uu_r = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь t – время, $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2} \geq 0$ – пространственная переменная, $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ – скорость звука, γ – показатель адиабаты, p – давление, ν – параметр геометрии: $\nu = 0$ в случае плоских, $\nu = 1$ – цилиндрических, $\nu = 2$ – сферических течений.

Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ газ является покоящейся ($u = 0$) однородной средой с плотностью ρ, равной 1. Это состояние газа назовем *состоянием 1.* Состояние газа в момент времени $t = t_* > t_0$ такое: газ однороден, его плотность ρ равна некоторому $\rho_* > 1$; при этом газ покоится. Это состояние газа назовем *состоянием 2.*

Тогда задача о безударном переходе «из покоя в покой» формулируется следующим образом: *требуется найти течения газа, возникающие при безударном переходе одномерного газового слоя из состояния 1 в состояние 2.* Другими словами, требуется безударным способом сжать покоящийся однородный газовый слой с плотностью $\rho = 1$ в покоящийся однородный газовый слой с плотностью $\rho = \rho_* > 1$. В таком виде задача, ранее предложенная А.Н. Крайко сформулирована в работе С.П. Баутина [6].

В работах [6-8] доказано существование решения задачи о переходе «из покоя в покой» в случае, когда газ сжимается двумя поршнями, один из которых покоится в точке с $r = r_0 > 0$, а второй сжимает газ снаружи, то есть координата второго поршня все время больше r_0. Там же сказано, что поскольку $r = r_0$ (координата неподвижного поршня) строго положительна, то факт существования решения задачи о переходе «из покоя в покой» имеет место и при сжатии газового слоя изнутри.

Однако доказанные теоремы имеют локальный характер и не указывают конкретных размеров области существования решения, что не позволяет установить количественные значения массы газа, для которых возможно существование решения задачи о переходе «из покоя в покой». Такие расчеты для случая сжатия объемов газа снаружи в сторону, обратную увеличению времени, проведены в работах [9,10].

Для численного расчета процессов сжатия мишеней, предложенных С.П. Баутиным в [11,12], также требуется: а) численное моделирование процессов сжатия газа изнутри, б) зная закон движения сжимающего поршня из решения «обратной» задачи восстанавливать течения, возникающие при его движении в прямом направлении изменения времени.

§ 1. Сжатие газа изнутри

Алгоритм расчета является конечно-разностным методом, в основу которого положен широко известный метод характеристик с пересчетом (см. например [13,14]). Решение строится в виде характеристической сетки, построение происходит в сторону уменьшения времени.

В рассчитываемом течении возникнет особенность на поршне в момент итогового сжатия (точка A, рис. 1). В этой точке имеет место скачок плотности от ρ_* до некоторого значения, которое определиться в конкретных расчетах. Течение в некоторой окрестности точки с особенностью является обобщением центрированной волны Римана, а в самой точке имеет место связь (см.[11]):

$$u = 2\frac{c-1}{\gamma-1}\ . \tag{2}$$

Сетка строится слоями, характеристики C_j^- определяют j-ый слой. Узлами характеристической сетки являются точки пересечения характеристик семейства C^+ и C^-. Координаты этих точек и значения параметров газа в них находятся по формулам метода характеристик.

Характеристическая сетка строится в пространстве физических переменных (r, t), в два этапа. Первый этап: расчет сетки от точки с особенностью вдоль стенки O_1O_2 и ниже, в направлении уменьшения времени, до тех пор пока не будет достигнуто значение плотности несжатого газа $\rho = \rho_o$. Второй этап: расчет сетки в области течения, примыкающего к покоящемуся несжатому газу. Параллельно с этим делается расчет траектории движения сжимающего поршня.

Построенная таким образом траектория движения поршня должна достичь характеристики фонового течения – $C^+_{\text{Н}}$-характеристики. Тогда на этом закончится построение траектории сжимающего поршня и решения всей задачи о переходе «из покоя в покой» «в целом», поскольку определится точка $(t = t_s, r = r_s)$. Эта точка лежит на $C^+_{\text{Н}}$-характеристике и из нее в момент времени $t = t_s$ стартует непроницаемый поршень, безударно сжимающий газ в задаче о переходе «из покоя в покой».

Полученная траектория поршня далее будет использоваться для расчетов в прямом направлении изменении времени.

§ 2. Прямой расчет сжатия

Полученные в расчетах Ю.В. Николаева [9,10] и § 1 траектории движения сжимающего поршня предполагается в дальнейшем использовать для расчетов сжатия мишеней, предложенных С.П. Баутиным в [11,12].

Для разработки подходов к решению этой задача на данном этапе сделано следующее: имея на входе только траекторию сжимающего поршня в виде координат отдельных точек, реализован расчет течений в прямом направлении изменения времени, до момента сильного сжатия.

Алгоритм расчета, как и в § 1, – метод характеристик с пересчетом. Характеристическая сетка строится в два этапа. Первый этап: расчет сетки в области течения, примыкающего к покоящемуся несжатому газу (до точки E, рис. 1). Второй этап: расчет сетки от точки E и выше вдоль стенки O_1O_2 до точки с особенностью, в направлении увеличения времени, до тех пор пока численно построенные характеристики C^- пересекаются с траекторией сжимающего поршня.

На обоих этапах характеристики C^- строятся в направлении траектории сжимающего поршня.

§ 3. Результаты расчетов

В таблице 1 приведены результаты расчетов из § 1 в случае $\gamma = 5/3$, $\nu = 1$.

Таблица 1.

№	m	ρ_*	Δt_1	Δt_2	n	δm
1	1	1000	0.00001	0.00001	1000	0.64
2	10	1000	0.00001	0.00001	1000	0.43
3	50	1000	0.00001	0.00001	50000	0.21
4	1	10000	0.000001	0.000001	100000	0.20
5	10	10000	0.000001	0.000001	100000	0.07
6	50	10000	0.000001	0.000001	500000	0.11

Здесь m – масса сжимаемого газа, ρ_* – конечная плотность сжатия, Δt_1, Δt_2, n – параметры, отвечающие за точность расчета, δm – относительной погрешности масс сжатого и несжатого газа.

В таблице 2 приведены результаты расчетов из § 2 для траекторий поршня из таблицы 1.

Таблица 2.

№	m	Δt_1	Δt_2	ρ_{**}
1	1	0.01	0.001	1120.13
2	10	0.01	0.001	1015.38
3	50	0.01	0.001	1074.49
4	1	0.01	0.001	10035.67
5	10	0.01	0.001	10128.24
6	50	0.01	0.001	10021.40

Здесь Δt_1, Δt_2, – параметры, отвечающие за точность расчета, ρ_{**} – максимальная плотность, полученная на стенке O_1O_2.

Таким образом численно построены течения, возникающие в газе при переходе из *состояния 1* в *состояние 2* при сжатии газа изнутри в направлении обратном изменению времени. В качестве одного из искомых элементов исследуемой задачи рассчитана траектория сжимающего поршня. При использовании полученных траекторий поршня численно построены течения газа в прямом направлении изменения времени.

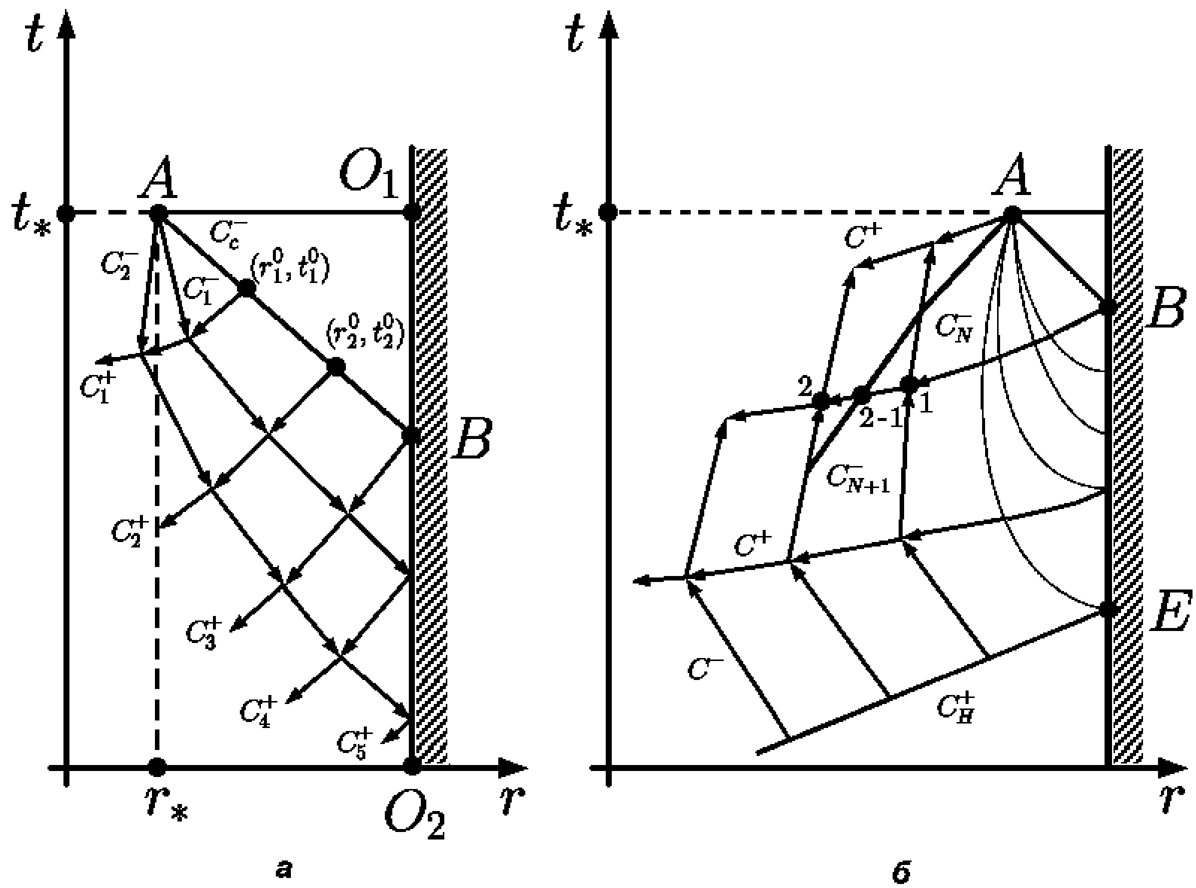

Рис. 1. Характеристическая сетка.

Список литературы

[1] Крайко А.Н. О свободном нестационарном расширении идеального газа // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1993. т 4. С. 155-163.

[2] Крайко А.Н. Вариационная задача об одномерном изэнтропическом сжатии идеального газа// Прикладная математика и механика. 1993. т 57, вып. 5. С. 35-51.

[3] Крайко А.Н. Асимптотические закономерности нестационарного расширения идеального газа в пустоту // Прикл. математика и механика. 1994. т 58, вып. 4. С. 70-80.

[4] Крайко А.Н. О неограниченной кумуляции при одномерном нестационарном сжатии идеального газа// Прикладная математика и механика. 1996. т 60, вып. 6. С. 1000-1007.

[5] Крайко А.Н., Тилляева Н.И. Автомодельное сжатие идеального газа плоским, цилиндрическим или сферическим поршнем// Теплофизика высоких температур. 1998. т 36, № 1. С. 120-128.

[6] Баутин С.П. О существовании решений задачи А.Н. Крайко // Прикладная механика и техническая физика. 2000. т 41, № 3. С. 48-55.

[7] Баутин С.П. О возможности изэнтропического перехода от однородного покоя в другое однородное покоящееся состояние идеального газа // Доклады Академии наук, 1998, т. 362, № 5, с. 621-624.

[8] Баутин С.П. Математическое исследование безударного сжатия газа // Успехи механики, 2002, т. 1, № 2, с. 3-36.

[9] Николаев Ю.В. Численное решение задачи А.Н. Крайко // Вычислительные технологии, 2005, т. 10, № 1, с. 90-102.

[10] Николаев Ю.В. Численное моделирование безударного сильного сжатия одномерных слоев политропного газа: Дис. канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2005. 130 с.

[11] Баутин С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 2007.

[12] Баутин С.П. Об одной конструкции мишеней для управляемого термоядерного синтеза // Тезисы международной конференции «X Забабахинские научные чтения». Снежинск, РФЯЦ ВНИИТФ, 2010. С. 30.

[13] Жуков А.И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Труды математического института, 1960, т.58.

[14] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Москва: Наука, 1968.