[1]

Численное моделирование нелинейных волн на поверхности стекающей по вертикальной плоскости пленки жидкости

Д.Г. Архипов, Д.И. Качулин
e-mail: theory@itp.nsc.ru

О.Ю. Цвелодуб
e-mail: tsvel@itp.nsc.ru

Новосибирский государственный университет
Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе

Исследована новая система уравнений для моделирования динамики длинноволновых возмущений на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости, стекающего по вертикальной плоскости. Показано, что данная система согласуется с системой, получаемой методом замены переменных, но, в отличие от последней, имеет дивергентный вид, подходящий для построения консервативных разностных схем. Продемонстрировано, что система сводится к одному уравнению для специальной функции, аналогичной гидродинамической функции тока, с соответствующими граничными условиями. В случае умеренных чисел Рейнольдса в предположении автомодельного профиля продольной скорости данная система приводится к модели Шкадова, а при малых числах Рейнольдса система сводится к уравнению Непомнящего для толщины пленки.

1. Введение и постановка задачи

Стекающая пленка жидкости – уникальный объект для изучения закономерностей нелинейной волновой динамики. Особенность ее состоит в том, что, с одной стороны, из-за малости характерных толщин течение жидкости обычно остается ламинарным, а с другой – амплитуда возмущений толщины пленки может существенно превышать ее равновесное значение, т. е. нелинейные эффекты играют в волновом процессе фундаментальную роль.

Полная постановка задачи включает уравнения Навье–Стокса с соответствующими кинематическими и динамическими граничными условиями. Одной из основных трудностей при этом оказывается подвижность и неопределенность положения границы заранее. Целью данной работы является получение модельной системы уравнений, описывающей эволюцию длинноволновых возмущений пленки жидкости при умеренных числах Рейнольдса, в которой проблема свободной границы в определенном смысле решена.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах № 11.G34.31.0035 (ведущий ученый – В.Е. Захаров, ГОУ ВПО «Новосибирский государственный университет») и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-91333-ННИО-а).

Если исключить из рассмотрения эффекты каплеобразования и осушения, то область, занимаемая жидкостью, односвязна. Наличие поверхностного натяжения приводит к отсутствию острых кромок на поверхности пленки. Поэтому, если функция $y = h(x,t)$, определяющая положение точек границы области является однозначной, то существует непрерывно дифференцируемое преобразование координат, переводящее область течения жидкости в полосу постоянной толщины:

$$x = x, \qquad \eta = y/h(x,t), \qquad t = t. \tag{1}$$

Новые переменные (1) не ортогональны, поэтому обычная формулировка уравнений движения в векторной форме неприменима. По этой причине часто ограничиваются простой заменой переменных в исходных уравнениях без преобразования векторов и тензоров (см., например, [1]). В результате получаются системы уравнений для декартовых компонент скорости жидкости. Эти компоненты, разумеется, не образуют вектор в новой криволинейной системе координат (1).

Другой способ выполнить преобразование (1) предполагает использование новых переменных в уравнениях, записанных в тензорной, инвариантной относительно систем координат, форме. Однако для этого необходима система уравнений движения жидкости в полном четырехмерном пространстве, где одной из координат является время. В физике такая система известна, как система уравнений релятивистской гидродинамики [2]. Тензорные обозначения позволяют переходить в произвольную подвижную систему координат, а применение ключевой идеи общей теории относительности – гравитация не меняет уравнений движения, но влияет только на метрику пространства – элегантно решает проблему внешней силы тяжести. Записав уравнения в новых криволинейных координатах покомпонентно, мы можем ограничиться первым членом разложения по малому параметру отношения скорости жидкости к скорости света и получить в длинноволновом пределе систему [3]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\mu}{\rho h}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = gh + \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right), \\
\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial \eta} = 0, \\
u(x,0,t) = 0, \quad v(x,0,t) = 0, \quad v(x,1,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}(x,1,t) = 0.
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь h – толщина пленки, u и v – контрвариантные компоненты продольной и поперечной скорости, соответственно, σ – поверхностное натяжение, ρ – плотность, μ – динамическая вязкость жидкости.

2. Исследование свойств системы

Главное преимущество полученной системы состоит в том, что она позволяет рассматривать задачу в области с заранее известными границами. Другими словами, проблема свободной поверхности – решена. Однако, упомянутый выше подход с простой заменой переменных также решает эту проблему. Для сравнения, можно рассмотреть систему уравнений, полученную в [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{h}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta h\int_0^1 ud\eta-h\int_0^\eta ud\eta\Big)\Big]\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}+\frac{\mu}{\rho h^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+g$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\Big(h\int_0^1 ud\eta\Big)=0 \tag{3}$$

$$u(x,0,t)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial \eta}(x,1,t)=0$$

Проинтегрируем с учетом граничных условий второе уравнение (2) по координате η от 0 до 1:

$$\int_0^1\Big(\frac{\partial(uh)}{\partial x}+\frac{\partial(hv)}{\partial \eta}+\frac{\partial h}{\partial t}\Big)d\eta=\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\Big(h\int_0^1 ud\eta\Big)+(hv)\Big|_0^1=\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\Big(h\int_0^1 ud\eta\Big)=0$$

Видно, что второе уравнение (2) совпадает со вторым уравнением (3). Кроме того, интегрирование данного уравнения от 0 до η дает:

$$\int_0^\eta\Big(\frac{\partial(uh)}{\partial x}+\frac{\partial(hv)}{\partial \eta}+\frac{\partial h}{\partial t}\Big)d\eta=\eta\Bigg(\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\Big(h\int_0^1 ud\eta\Big)\Bigg)-\eta\frac{\partial}{\partial x}\Big(h\int_0^1 ud\eta\Big)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\Big(h\int_0^\eta ud\eta\Big)+hv(\eta)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(h\int_0^\eta ud\eta\Big)-\eta\frac{\partial}{\partial x}\Big(h\int_0^1 ud\eta\Big)+hv(\eta)=0$$

Поэтому:

$$v=\frac{1}{h}\Big[\eta\frac{\partial}{\partial x}\Big(h\int_0^1 ud\eta\Big)-\frac{\partial}{\partial x}\Big(h\int_0^\eta ud\eta\Big)\Big] \tag{4}$$

Раскроем скобки в первом уравнении (2):

$$h\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+u\left(\frac{\partial(uh)}{\partial x}+\frac{\partial(hv)}{\partial \eta}+\frac{\partial h}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\mu}{\rho h}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=gh+\frac{\sigma}{\rho}h\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}$$

Очевидно, можно использовать второе уравнение (2) и разделить результат на h. Тогда с учетом (4) видно, что первые уравнения (2) и (3) также совпадают. Но в отличие от системы (3), новая система имеет дивергентную форму, подходящую для построения консервативных разностных схем.

Введем новую функцию $\psi(x,\eta,t)$, аналогичную гидродинамической функции тока так, чтобы второе уравнение (2) выполнялось тождественно:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta}=hu,\qquad \frac{\partial \psi}{\partial x}=-hv-\eta\frac{\partial h}{\partial t} \tag{5}$$

После подстановки (5) в первое уравнение системы (2), получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_\eta^2}{h}\right)-\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\psi_\eta(\psi_x+\eta h_t)}{h}\right)-\frac{\mu}{\rho h^2}\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}=gh+\frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right) \tag{6}$$

с граничными условиями:

$$\psi(x,0,t)=0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}(x,0,t)=0, \qquad \frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,1,t)=0, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}(x,1,t)=0$$

Определив характерные масштабы скорости – u_0, длины – l_0, толщины – h_0, времени – l_0/u_0 и функции ψ, определяющей расход пленки в данном сечении – u_0h_0, можно переписать уравнение (6) в безразмерных переменных (с верхней $\tilde{}$).

Выберем h_0 и u_0 так, чтобы $\tilde{h}=1$ и $\tilde{\psi}(1)=1$ для безволнового течения:

$$\tilde{\psi}(1)=\frac{\rho g h_0^2}{3\mu u_0}=1, \qquad u_0=\frac{\rho g h_0^2}{3\mu}$$

Введем безразмерные параметры: число Рейнольдса – Re, число Вебера – We, и отношение толщины пленки к характерной длине волны – ε:

$$Re=\frac{\rho u_0 h_0}{\mu}, \qquad We=\frac{\sigma}{\rho g h_0^2}, \qquad \varepsilon=\frac{h_0}{l_0}$$

В итоге, получаем систему в безразмерном виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\eta\partial\tilde{t}}+\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(\frac{\tilde{\psi}_\eta^2}{\tilde{h}}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\tilde{\psi}_\eta(\tilde{\psi}_{\tilde{x}}+\eta\tilde{h}_{\tilde{t}})}{\tilde{h}}\right)-\frac{1}{\varepsilon Re\tilde{h}^2}\frac{\partial^3\tilde{\psi}}{\partial\eta^3}=\\ =\frac{3\tilde{h}}{\varepsilon Re}+\frac{3We\varepsilon^2}{Re}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(\tilde{h}\frac{\partial^2\tilde{h}}{\partial\tilde{x}^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{x}}\right)^2\right)\end{gathered} \tag{7}$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{x},0,\tilde{t})=0, \qquad \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\eta}(\tilde{x},0,\tilde{t})=0, \qquad \frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{t}}+\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x},1,\tilde{t})=0, \qquad \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\eta^2}(\tilde{x},1,\tilde{t})=0$$

Если предположить, что в случае умеренного расхода, функция $\tilde{\psi}(\tilde{\mathrm{x}},\eta,\tilde{t})$ является автомодельной:

$$\tilde{\psi}(\tilde{x},\eta,\tilde{t})=\tilde{\psi}(\tilde{x},1,\tilde{t})f(\eta)\equiv\tilde{q}(\tilde{x},\tilde{t})f(\eta),$$

то после интегрирования уравнения (7) по координате η от 0 до 1, получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial\tilde{t}}+\beta\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(\frac{\tilde{q}^2}{\tilde{h}}\right)=-\frac{\gamma}{\varepsilon Re}\frac{\tilde{q}}{\tilde{h}^2}+\frac{3\tilde{h}}{\varepsilon Re}+\frac{3We\varepsilon^2}{Re}\tilde{h}\frac{\partial^3\tilde{h}}{\partial\tilde{x}^3}\\ \frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{t}}+\frac{\partial\tilde{q}}{\partial\tilde{x}}=0\end{gathered} \tag{8}$$

где $\beta=\int_0^1(df/d\eta)^2d\eta, \quad \gamma=d^2f/d\eta^2\big|_0$. Для профиля скорости Нуссельта $f(\eta)=(3/2)(\eta^2-\eta^3/3)$ это приводит к модели Шкадова [4]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial\tilde{t}}+\frac{6}{5}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(\frac{\tilde{q}^2}{\tilde{h}}\right)=-\frac{3}{\varepsilon Re}\frac{\tilde{q}}{\tilde{h}^2}+\frac{3\tilde{h}}{\varepsilon Re}+\frac{3We\varepsilon^2}{Re}\tilde{h}\frac{\partial^3\tilde{h}}{\partial\tilde{x}^3}\\ \frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{t}}+\frac{\partial\tilde{q}}{\partial\tilde{x}}=0\end{gathered}$$

Известно, что при малых расходах задача сводится к одному уравнению для эволюции возмущений толщины пленки. Этот результат также может быть легко получен из уравнения (7) (ниже мы будем опускать знак $\tilde{}$). Вследствие малости толщины пленки по сравнению с длиной волны, функция тока $\psi(\mathrm{x}, \eta, t)$ представляется в виде ряда по малому параметру ε:

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + ...$$

В нулевом порядке находим:

$$\frac{\partial^3\psi_0}{\partial\eta^3} = -3h^3, \quad \psi_0(x,0,t) = 0, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial\eta}(x,0,t) = 0, \quad \frac{\partial^2\psi_0}{\partial\eta^2}(x,0,t) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial\psi_0}{\partial x}(x,1,t) = 0$$

Следовательно:

$$\psi_0 = h^3\left(\frac{3}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta^3\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + 3h^2\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

Для первого порядка разложения, имеем:

$$\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\eta^3} = Reh^4\left(3\eta\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{9}{2}\eta^2h^2\frac{\partial h}{\partial x}\right) - 3We\varepsilon^2h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}$$

$$\psi_1 = Reh^4\left(\left(\frac{\eta^4}{8} - \frac{3\eta^2}{4}\right)\frac{\partial h}{\partial t} + \left(\frac{3\eta^5}{40} - \frac{3\eta^2}{4}\right)h^2\frac{\partial h}{\partial x}\right) - \left(\frac{\eta^3}{2} - \frac{3\eta^2}{2}\right)We\varepsilon^2h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}$$

Подставляя эволюционное уравнение (9), полученное в нулевом порядке, приходим к выражению:

$$\psi_1 = Reh^6\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{3\eta^5}{40} - \frac{3\eta^4}{8} + \frac{3\eta^2}{2}\right) - We\varepsilon^2h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\left(\frac{\eta^3}{2} - \frac{3\eta^2}{2}\right)$$

Вычисление функции тока на свободной поверхности дает:

$$\psi_1(x,1,t) = \frac{6}{5}Reh^6\frac{\partial h}{\partial x} + We\varepsilon^2h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}$$

Подставим полученное выражение в соответствующее граничное условие и получим искомое эволюционное уравнение для толщины пленки:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + 3h^2\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{6}{5}\varepsilon Reh^6\frac{\partial h}{\partial x} + We\varepsilon^3h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) = 0 \tag{10}$$

Если ограничиться малыми, но конечными возмущениями, то из (10) можно получить уравнение, известное теперь как уравнение Курамото–Сивашинского:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + 4H\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} = 0$$

Здесь H – отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня. Отметим, что применительно к жидкой пленке данное уравнение было впервые получено Непомнящим в [5].

3. Заключение

Исследована новая система уравнений для моделирования динамики длинноволновых возмущений на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости, стекающего по вертикальной плоскости. Показано, что данная система согласуется с системой, получаемой методом замены переменных, но, в отличие от последней, имеет дивергентный вид, подходящий для построения консервативных разностных схем. Продемонстрировано, что система сводится к одному уравнению для специальной функции, аналогичной гидродинамической функции тока, с соответствующими граничными условиями. В случае умеренных чисел Рейнольдса в предположении автомодельного профиля продольной скорости данная система приводится к модели Шкадова, а при малых числах Рейнольдса система сводится к уравнению Непомнящего для толщины пленки.

Список литературы

[1] Гешев П.И., Ездин Б.С. Расчет профиля скорости и формы волны на стекающей пленке жидкости // В кн.: Гидродинамика и тепломасообмен течений жидкости со свободной поверхностью. Новосибирск. 1985. С. 49-57.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[3] Алексеенко С.В., Архипов Д.Г., Цвелодуб О.Ю. Дивергентная система уравнений для пленки жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Доклады РАН. 2011. Т.436. №1. С. 43-46.

[4] Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. №1. С. 43-51.

[5] Непомнящий А.А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. №3. С. 28-34.