Численное решение интегро-дифференциального уравнения КдВ для моделирования волн в парожидкостных средах *

Н.И. Горбенко

Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
Новосибирский государственный университет
Новосибирск, nikolay.gorbenko@gmail.com

1 Введение

Уравнение Кортевега-де-Вриза (КдВ) является одним из основных математических инструментов для описания процессов распространения волновых процессов в средах с дисперсионными и нелинейными свойствами, см. монографии [1-4] и цитируемую в них литературу. Целью данной работы является сравнительный анализ устойчивости и эффективности алгоритмов численного решения на длительные временные интервалы для уравнения КдВ с правой частью интегрального вида, которое описывает динамику волн в парожидкостной среде с учетом теплообмена между пузырьками и окружающей их жидкостью. В данном случае принимается сферическая ячеистая модель среды в предположении, что все пузырьки имеют одинаковый радиус R, намного меньший расстояния между ними. При этом каждый пузырек окружается адиобатической ячейкой жидкости с конечным радиусом $R_\infty \gg R$ и равенством нулю теплового потока на границе. На границе пузырек-жидкость принимается равенство температуры границы температуре насыщения T_s, соответствующей одинаковому давлению пара и жидкости $p(R)$ в данный момент времени $p(t)$. Предполагается, что исходное давление $p^0(r)$ постоянно при $0 < r < R_\infty$, и в начальный момент времени $t = 0$ на границе $r = R_\infty$ скачком прикладывается давление p_∞.

Исходная постановка описывается уравнениями гидродинамики в сферической системе координат, которые замыкаются уравнением Рэлея для одиночного

*Работа поддержана интеграционным грантом СО РАН ИП-59, а также грантом Правительства РФ N 11.634.31.035 (НГУ).

пузырька (здесь и далее математическая модель описывается в соответствии с [4]):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}(\rho u r^2)=0,$$
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}(\rho u^2 r^2)-\frac{u}{r}+\frac{\partial p}{\partial r}=0, \qquad (1)$$
$$\rho\Big[R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\Big(\frac{\partial R}{\partial t}\Big)^2\Big]=p-p_\infty,$$

где p,ρ,u – давление, плотность и скорость среды, причем жидкость предполагается несжимаемой, пар в пузырьке – гомобарическим.

Полагая в акустическом приближении малость возмущений $\delta R \ll R^0, \delta p \ll p^0$, приходим к нелинейному уравнению Буссинеска

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-B\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta p)^2-2\beta_1 c_0^2\frac{\partial^4 p}{\partial x^4}=0, \qquad (2)$$

где $c_0=\sqrt{\gamma p_0/(\rho_0\varphi_0)}$, $\beta_1=R_0^2/6\varphi_0(1-\varphi_0)$, $B=(\gamma+1)/(2\varphi_0\rho_0)$, γ – показатель адиабаты, а φ_0 – начальное объемное газосодержание среды.

Для монотонно распространяющейся и слабо деформируемой волны с использованием соотношения $\partial/\partial t=-c_0\partial/\partial x$ уравнение (2) сводится к уравнению Кортевега-де-Вриза

$$\frac{\partial p}{\partial t}+c_0\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}c_0\frac{\delta p}{p_0}\frac{\partial p}{\partial x}+\beta_1 c_0\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}=0. \qquad (3)$$

При учете диссипативных процессов в вязкой жидкости и теплообмена между пузырьками и окружающей их жидкостью, который оценивается с помощью интеграла Дюамеля из приближенного решения уравнения теплопроводности, для безразмерного давления $\tilde p=(\delta p/p_0)(\gamma+1)/2\gamma$ получаем релаксационное уравнение Кортевега-де-Вриза-Бюргерса (КдВБ) с сингулярной подынтегральной функцией в правой части:

$$\frac{\partial\tilde p}{\partial t}+c_0(1+\tilde p)\frac{\partial\tilde p}{\partial x}-\upsilon_{\text{эф}}\frac{\partial^2\tilde p}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3\tilde p}{\partial x^3}=\frac{\gamma-1}{2\tau_0}\int\limits_0^t\frac{\partial\tilde p}{\partial t_1}\frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1}}, \qquad (4)$$

где ν есть эффективная вязкость, $\beta=\beta_1 c_0 p^0(\gamma+1)/2\gamma, \tau_0=R_0^2/15\pi^2 a$ и a – температуропроводность газа.

Полагая для простоты в (3) коэффициенты при производных равными единице, однородное уравнение КдВ перепишем в форме

$$p_t=-pp_x-p_{xxx}=\partial_x\Big(\frac{1}{2}p^2+p_{xx}\Big).$$

Вводя далее гамильтониан (полную энергию) в виде

$$H(p)=\int dx(\frac{1}{6}p^3-\frac{1}{2}p_x^2), \qquad (5)$$

уравнение КдВ можно записать в гамильтоновой форме

$$p_t = -\partial_x(\frac{\delta H}{\delta p}). \tag{6}$$

Обозначая теперь $p = \varphi_x, v = p_t, w = -p_x$ и четырехмерный вектор $\bar{z} = (\varphi, p, v, w)^T$, мы приходим к мульти-симплектической гамильтоновой системе уравнений в частных производных

$$K\bar{z}_t + L\bar{z}_x = \nabla_z S(\bar{z}), \tag{7}$$

где $S(\bar{z}) = \frac{1}{2}v^2 - pw + \frac{1}{6}p^3$ есть ковариантная гамильтонова функция, а K и L – косо-симметричные матрицы следующего вида:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

В данной работе мы проводим сравнительный анализ устойчивости и точности различных численных методов для решения уравнения КдВ в пренебрежении вязкостью жидкости. В п.2 приводятся явные и неявные схемы с теоретическими оценками их погрешностей и областей устойчивости, которые обобщают схемы из [9-10] для случая со второй производной, а также предлагается алгоритм для вычисления так называемого интеграла с памятью в (9) с фиксированным объемом памяти, а в п. 3 обсуждаются результаты вычислительных экспериментов для модельных задач.

2 Описание вычислительных схем

Запишем уравнение Кортевега-де-Вриза в следующем виде:

$$\begin{gathered} \frac{\partial p}{\partial t} + c_0(1+p)\frac{\partial p}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} = \\ w\int_0^t \frac{\partial p}{\partial t'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}, \quad 0 < t \le T < \infty, \end{gathered} \tag{9}$$

где параметр w характеризует процесс массообмена в волне, обусловленный фазовым переходом первого рода, величинf ν есть эффективная вязкость, а c_0 и β ,безразмерные коэффициенты.

Для изучения решений, которые являются экспоненциально малыми, таких как уединенные волны, можем воспользоваться достаточно большой периодической областью так чтобы остатки решений были меньше машинной точности используемой в вычислениях, т.е.

$$p(x+T) = p(x). \tag{10}$$

Однако в некоторых ситуациях мы хотели бы включить в рассмотрение граничные условия. Так как уравнение (9) является уравнением третьего порядка по пространственным переменным, то естественно что требуются три граничных условия. Холмер [5] показал, что единственность для уравнения КдВ имеет место с двумя однородными условиями Дирихле и однородным условием Неймана только на правой стороне рассматриваемого отрезка $[a, b]$:

$$p(a,t) = 0, \quad p(b,t) = 0, \quad \frac{\partial p(b,t)}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

Первая схема для (9) без интегрального члена была предложена в [6] и привела к открытию солитонов:

$$\begin{gathered} u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{c_0 \tau}{h} \frac{3 + u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n}{3} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \\ \frac{\beta\ \tau^2}{h^3} (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n). \end{gathered} \tag{12}$$

Несмотря на то, что она достаточно точна, чтобы выявить это понятие, при длительных расчетах численные результаты показывают нефизические осцилляции и развал решения, независимо от величины шага по времени. В последние годы появилось много численных схем, основанных на конечных разностях, элементах или объемах, спектральных и псевдо спектральных методах и многих других. Все они являются чисто неявными или полуявными, за исключение двух явных. Они базируются на концепции мультисимплектичности (7) см. [9] или на аппроксимации гамильтониана (6) [10,11] для этого уравнения. Симплектический интегратор для гамильтониана обеспечивают при долговременных вычислениях законы сохранения для энергии и моментов, в то время как мультисимплектические интеграторы сохраняют эти законы локально много лучше из-за своей локальной природы.

В последние годы появилось две явные мультисимплектичные шеститочечные схемы. Первая схема [7]

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j+1}^{n-1}}{\tau} \right) + c_0 \frac{2 + u_{j+1}^n + u_j^n}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \right) - \\ \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \beta \frac{u_{j+2}^n - 3u_{j+1}^n + 3u_j^n - u_{j-1}^n}{h^3} = I_h^n \end{gathered} \tag{13}$$

может удалять нефизические осцилляции, а также аппроксимативно сохранять некоторые законы сохранения для КдВ. Здесь и далее I_h^n есть аппроксимация интегрального члена в (9), см. ниже. Второй алгоритм предложен в [8]:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^{n}}{\tau}+\frac{u_{j+1}^{n}-u_{j+1}^{n-1}}{\tau}\right)+c_0\frac{3+u_{j+1}^{n}+u_{j}^{n}+u_{j-1}^{n}}{3}\left(\frac{u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n}}{2h}\right)-$$
$$\nu\frac{u_{j+1}^{n}-2u_{j}^{n}+u_{j-1}^{n}}{h^2}+\beta\frac{u_{j+2}^{n}-2u_{j+1}^{n}+2u_{j-1}^{n}-u_{j-2}^{n}}{2h^3}=I_h^n. \tag{14}$$

Здесь при первом шаге по времени используется формула

$$\left(\frac{u_j^1-u_j^0}{\tau}\right)+c_0\frac{3+u_{j+1}^{0}+u_{j}^{0}+u_{j}^{0}}{3}\left(\frac{u_{j+1}^{0}-u_{j-1}^{0}}{2h}\right)-$$
$$\nu\frac{u_{j+1}^{0}-2u_{j}^{0}+u_{j-1}^{0}}{h^2}++\beta\frac{u_{j+2}^{0}-2u_{j+1}^{0}+2u_{j-1}^{0}-u_{j-2}^{0}}{2h^3}=I_h^0.$$

С помощью “замораживания” коэффициентов и Фурье – анализа схем (12), (13) и (14) установлено, что эти схемы устойчивы при выполнении следующих условий соответственно:

$$\Delta t/h\le æ^{-1},\quad \Delta t/h\le æ^{-1},\quad \Delta t/h\le 2æ^{-1},\quad æ=\max_{x,t}|u|+4\mu^2/h^2.$$

Таким образом, область устойчивости схемы (14) в два раза больше, чем у схем (12),(13). Для проведения численного сравнения были использованы также схемы из монографии Ю.А.Березина [2], которые мы здесь не приводим.

Остановимся теперь на неявных схемах решения уравнения КдВ. Первая схема была широко использовалась при моделировании распространении волн в жидкости с пузырьками пара [4].

$$\frac{1}{2\tau}[1\ 0\ 1]u+\frac{c_0}{h}\Big(\frac{1}{2}[-1\ 1]\Big)\Big(u+\frac{1}{2}[1\ 1]u\Big)+\frac{\beta}{h^3}[1\ \ -2\ 0\ 2\ \ -1]u. \tag{15}$$

Вторая схема может быть представлена 12-точечной формулой :

$$\frac{1}{16\tau}\begin{bmatrix}1&3&3&2\\0&0&0&0\\-1&-3&-3&-2\end{bmatrix}u+\frac{c_0}{4h}\begin{bmatrix}-1&0&1\\-1&0&1\end{bmatrix}\left(u+\left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}u\right)^2\right)-$$
$$\frac{\nu}{4h^2}\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\1&-2&1\end{bmatrix}u+\frac{\beta}{4h^3}\begin{bmatrix}-1&3&-3&1\\-2&6&-6&2\\-1&3&-3&1\end{bmatrix}u=I_h^n. \tag{16}$$

Мы используем 8-точечную конечно-объемную схему для вычисления первого шага по времени.

$$\frac{1}{8\tau}\begin{bmatrix}1&3&3&2\\-1&-3&-3&-2\end{bmatrix}u+\frac{c_0}{2h}\begin{bmatrix}-1&0&1\end{bmatrix}\left(u+\left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}u\right)^2\right)-$$
$$\frac{\nu}{4h^2}\begin{bmatrix}1&-2&1\\1&-2&1\end{bmatrix}u+\frac{\beta}{2h^3}\begin{bmatrix}-1&3&-3&1\\-1&3&-3&1\end{bmatrix}u=I_h^0.$$

Для эффективной аппроксимации интегрального члена в (9), который представляет собой так называемый интеграл с памятью и имеет интегрируемую особеноость создан численный алгоритм с фиксированной памятью. Суть его работы следующая. Мы выбираем положительные целые числа - большое m и малое l. На первых $m+l$ шагах мы разбиваем интеграл на две части. Для "регулярной"части мы используем формулу трапеций, а для сингулярной части ($t_1 \to t$ in (9)) мы используем оптимальные весовые Чебышевские квадратуры для того чтобы запомнить все данные в памяти. Когда $n > m+l$ мы используем итеративную формулу, выведенную для аппроксимации первой части интеграла I_h^n

$$I_h^n = I_h^{n-1} + 2\sqrt{\tau}\frac{\partial p}{\partial t}(0)\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right]. \tag{17}$$

Ошибка дискретизации для такой аппрксимации интеграла есть порядка $O(\tau^{1.5})$.

3 Примеры численных экспериментов

Представим результаты численных экспериментов для тестовых задач с аналитическим решением для КдВ уравнения. Этоприер описывает двух солитонную волну, которая описывается следующим выражением:

$$u(x,t) = 2\frac{K_1+K_2}{(1+e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+a^2e^{\theta_1+\theta_2})^2}, \tag{18}$$

$$K_1 = k_1^2e^{\theta_1} + k_2^2e^{\theta_2} + 2(k_2-k_1)^2e^{\theta_1+\theta^2},$$

$$K_2 = a^2(k_2^2e^{\theta_1}+k_1^2e^{\theta_2})e^{\theta_1+\theta_2},$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1.5, \quad a^2 = \Big(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\Big)^2 = \frac{1}{25},$$

$$\eta = 0.0013020833, \theta_1 = k_1\frac{x}{\sqrt{6\eta}} - k_1^3\frac{t}{6^{3/2}\sqrt{\eta}} - 3,$$

$$\theta_2 = k_2\frac{x}{\sqrt{6\eta}} - k_2^3\frac{t}{6^{3/2}\sqrt{\eta}} + 3.$$

В наших численных экпериментах с аналитическим решением мы рассматриваем уравнение (9) с $\nu = w = 0$ на отрезке $[-40, 40]$ с периодическими граничными условиями и начальными данными (16) для $t = 0$. Сеточная область содержит 400 узлов ($h = 0.2$) с отношением $\frac{\tau}{h} = 0.005$ для явных схем и $\frac{\tau}{h} = 0.5$ для неявных. Вычисления были проведен вплоть до $t = 40$. При этом численные схемы (12),(15) и (15) развалились, а схемы (14) и (16) показали одинаковые результаты, которые мы представляем на Рис.1, Экспериментальные данные с различными сеточными шагами подтверждают второй порядок сходимости и действительно высокую устойчивость.

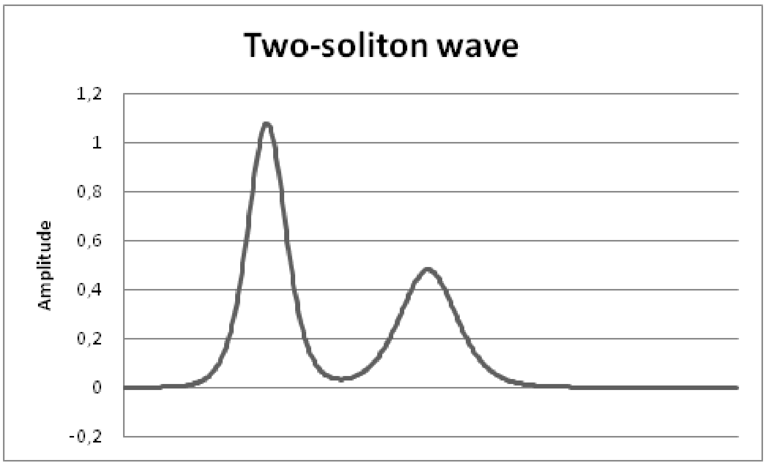

Рис. 1: Численное решение при t=40.

Второй цикл экспериментов был выполнен для уравнеия (9) с нулевыми начальными данными для того чтобы продемонстрировать влияние интегрального члена и вязкости. На левой границе ставилось условие Дирихле вида

$$p(t,0) = \begin{cases} p_0 \frac{t}{t_0}, 0 < t < t_1 \\ p_0 \frac{1-(t-t_1)}{t_2}, t_1 < t < t_2 \\ 0, t > t_2 \end{cases}$$

Все вычисления были проведены при следующих данных:

$$x \in [0,44], \tau = 0.0002, h = 0.008, w = 0.25, c_0 = 1,$$
$$\beta = 10^{-6}, \nu = 10^{-2}, p_0 = 10, t_1 = 0.01, t_2 = 0.025,$$
$$T = 10.$$

На Рис.2-Рис.5 показаны следующие численные результаты: KdV уравнение ($\nu = w = 0$), KdV уравнение с интегральным членом ($\nu = w = 0.25$), KdV-Бюргерса уравнение с вязкостью и интегральным членом ($\nu = 10^{-2}, w = 0.25$), KdV-Бюргерса уравнение без интегрального члена ($\nu = 10^{-2}, w = 0$). Как лего видеть, что рассмотренные задачи имеют различное волновое поведение.

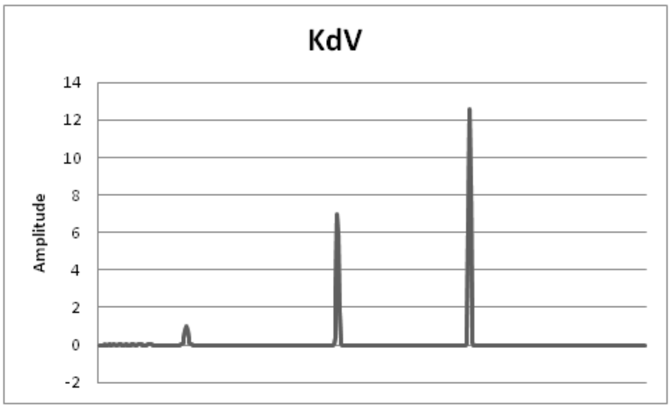

Рис. 2: Численное решение при t=10 ($\nu = 0, w = 0$)

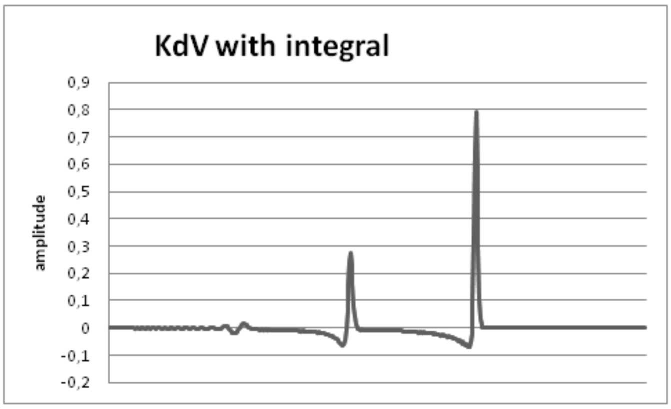

Рис. 3: Численное решение при t=10 ($\nu = 0, w = 0.25$)

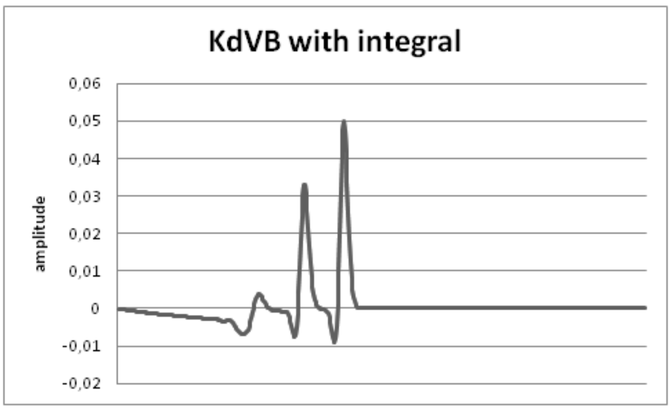

Рис. 4: Численное решение при t=10 ($\nu = 10^{-2}, w = 0.25$)

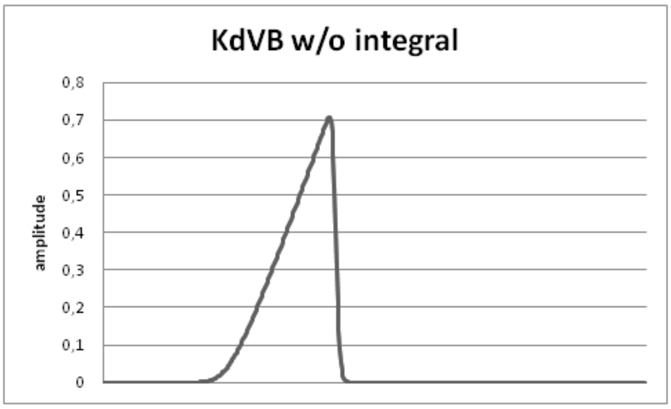

Рис. 5: Численное решение при t=10 ($\nu = 10^{-2}, 0$)

Литература

1. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах.–М.: Наука, 1973.

2. Березин Ю.А. Численное исследование нелинейных волн в разреженной плазме.–Наука, Сибирское отделение.–Новосибирск, 1977.

3. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи.–М.: Наука, 1980.

4. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред.–М.: Энергоатомиздат, 1990.

5. Holmer J. The initial-boundary value problem for the Korteweg-de Vries equation. Comm. Partial Diff. Eq., 31, 2006, 1151-1190.

6. Zabusky N.J., Kruskal M.S. Phys. Rev. 155, 1965, 240.

7. Yanfen Cui, De-kang Mao. Numerical method satisfying two conservation laws for the Korteweg-de Vries equation.J.Comput., Phys., v. 227, 2007, 376-399.

8. Wang Y.S., Wang B., Chen X. An explicit scheme for the KdV equation.Chinese Phys., Lett., 25, 2008, 2335.

9. U. Ascher and R. I. McLachlan, On symplectic and multisymplectic schemes for the KdV equations, J. Sci. Comput., 25 (1) (2005) 83-104.

10. Bridges T.,Reich S., Numerical methods for Hamiltonian PDEs, J. Phys. A. : Math. Gen.,39 (2006) 5287-5320.

11. McLachan R. Symplectic integration of Hamiltonian wave equations,Numerische Mathematik, 1994, V. 66, N. 1, 465-492

12. Vilmart G. Etude d'integrateurs geometriques pour des equations differentialles. These N 4038, Universite de Rennes, 2008.