О влиянии деформируемости поверхностей раздела на устойчивость термодиффузионного равновесия двухслойной системы бинарных смесей *

М.В. Ефимова
ИВМ СО РАН, г.Красноярск
e-mail: `efmavi@mail.ru`

Для исследования устойчивости состояния термодиффузионного равновесия системы двух несмешивающихся несжимаемых теплопроводных смесей с общей поверхностью раздела, одной твердой стенкой и свободной границей построена зависимость числа Марангони от волнового числа при фиксированных других параметрах системы, определена зависимость декремента от волнового числа. Показано влияние деформируемости границ раздела исследуемой системы, а также эффектов термодиффузии на области устойчивости состояния равновесия системы.

В условиях отсутствия массовых сил рассмотрим систему плоских слоёв, состоящую из двух несмешивающихся несжимаемых вязких смесей с общей поверхностью раздела, ограниченных твёрдой стенкой и свободной поверхностью. Движение системы описывается уравнениями Навье – Стокса, конвективного теплообмена и концентрации с учетом термодиффузии. Зависимость поверхностного натяжения от температуры и концентрации на поверхности раздела и свободной границе предполагается линейной:

$$\sigma_j(\theta, c) = \sigma_0^j - æ_T^j(\theta - \theta_0) - æ_c^j(c - c_0),\ æ_c^j = \text{const} < 0,\ æ_T^j = \text{const} > 0,$$

где $j = 1, 2$, $\sigma_0 > 0$ — постоянная, а $c_0,\ \theta_0$ — концентрации и температуры в некоторой точке поверхности раздела или свободной границы.

На поверхности раздела смесей заданы условия равенства скоростей, температур и баланса концентраций. Кроме того, должны быть выполнены кинематическое, динамическое условие, а также условие равенства потоков тепла и вещества через поверхность раздела [1].

На свободной границе также выполнены условия: кинематическое, динамическое, теплообмена и отсутствия потока вещества. Процессы адсорбции–десорбции на свободной поверхности и границе раздела не учитываются.

На твёрдой стенке заданы температура, условия прилипания и отсутствия потоков вещества.

Состояние термодиффузионного равновесия системы двух бинарных смесей в описанной выше конфигурации даётся формулами

$$\mathbf{u}_j = 0, \quad p_j = \text{const}, \quad \theta_1 = \frac{Q - \beta(\theta_{10} - \theta_g)}{k_1 + \beta l(k+1)}\,(y + l) + \theta_{10},$$

$$\theta_2 = \frac{Q - \beta(\theta_{10} - \theta_g)}{k_1 + \beta l(k+1)}\,(ky + l) + \theta_{10}, \tag{1}$$

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-01-00283 и интеграционного проекта СО РАН № 116.

$$c_1 = -\frac{Q-\beta(\theta_{10}-\theta_g)}{k_1+\beta l(k+1)}\,\alpha_1\,y + c_0, \quad c_2 = -\frac{Q-\beta(\theta_{10}-\theta_g)}{k_1+\beta l(k+1)}\,\alpha_2 k\,y + \lambda c_0.$$

В (1) $k = k_1/k_2$ — отношение коэффициентов теплопроводности смесей; λ — постоянная равновесия Генри; c_0 — концентрация на границе раздела; β — коэффициент межфазного теплообмена; θ_g — температура пассивного газа; θ_{10} — температура твёрдой стенки; Q — заданный внешний поток тепла, $\alpha_j = k_\theta^j/\theta_c^j$, — параметры термодиффузии, где k_θ^j — коэффициент термодиффузии, θ_c^j — средние температуры слоёв (все эти величины предполагаются постоянными). Считается, что значения $\alpha_j < 0$ соответствуют нормальной термодиффузии, при которой тяжёлые компоненты стремятся перейти в более холодные области, а лёгкие — в более нагретые. Кроме уже введённых, система характеризуется и другими физическими параметрами: ρ_j — плотности, χ_j, d_j — коэффициенты температуропроводности и диффузии смесей. Всюду в обозначениях $j = 1, 2$ означает номер слоя.

Для исследования устойчивости равновесного состояния двух слоев жидкостей (1) введем малые возмущения скорости, давления, температуры и концентрации: $\mathbf{U}, P, T, K$. Проводя линеаризацию по возмущениям, можно получить задачу для возмущения скорости, давления, температуры и концентрации в каждой смеси [1].

Решение полученной краевой задачи ищем в виде нормальных волн

$$(U, V, P, T, K, R) = (U(\eta), V(\eta), P(\eta), T(\eta), K(\eta), R)\exp(i\alpha\xi - iC\tau).$$

Здесь α — волновое число, $C = C_r + iC_i$ — комплексный декремент, η, ξ — безразмерные координаты. Критерием устойчивости равновесного состояния (1) служит знак мнимой части декремента. Если существуют такие значения параметров, что $C_i > 0$, то имеет место неустойчивость, случаю $C_i = 0$ соответствует граница устойчивости (нейтральные возмущения).

В результате получаем спектральную краевую задачу для амплитуд нормальных возмущений и параметра C [2].

В системе введены безразмерные параметры: число Марангони M задает интенсивность термокапиллярного воздействия на границе раздела и свободной поверхности, а капиллярный параметр We_j характеризует способность этих границ к деформациям.

Если рассмотреть только монотонные возмущения, положив $C = 0$, можно существенно упростить задачу. И представляя решения спектральной задачи в виде рядов по α

$$\begin{gathered} U_j = \alpha U_j^1 + \alpha^2 U_j^2 + \dots, \quad V_j = \alpha^2 V_j^2 + \alpha^3 V_j^3 + \dots, \quad P_j = P_j^0 + \alpha P_j^1 + \dots, \\ T_j = \frac{T_j^0}{\alpha^2} + \dots, \quad K_j = \frac{K_j^0}{\alpha^2} + \dots, \quad R_j = \frac{R_j^0}{\alpha^2} + \dots, \quad M = \frac{M^0}{\alpha^2} + \dots \end{gathered} \tag{2}$$

в нулевом приближении, получим задачу для нахождения M^0. Это значение используется как начальное приближение при построении зависимости $M(\alpha)$ методом ортогонализации Годунова С.К. [3]

Для произвольных возмущений рассматривается спектральная задача относительно декремента C. В этом случае разложения по α основных величин совпадает с (2), число Марангони остаётся постоянным, а комплексный декремент представляется в виде

$$C = \alpha^2 C^2 + \dots.$$

Анализ механизмов неустойчивости осложняется наличием в задаче довольно большого числа независимых параметров, каждый из которых вносит свой вклад в развитие неустойчивости системы. В таких ситуациях целесообразно выделить частные случаи, в которых на появление и развитие неустойчивости влияет изменение какого-либо параметра.

В результате численных расчетов обнаружено, что коротковолновые возмущения, как и для случая недеформируемых поверхности раздела и свободной границы, будут устойчивы как при подогреве твердой стенки, так и при нагреве свободной поверхности. Деформация границ раздела приводит к появлению разрывов на графике в диапазоне длинных и умеренных волн.

Если на поверхности раздела концентрация слабо влияет на поверхностное натяжение границы раздела, то в этом случае "разрыв"смещается в сторону умеренных волн. При возмущениях с длиной волны $\alpha < 0.25$ устойчивость возможна при нагреве свободной поверхности, при $0.25 < \alpha < 0.71$ состояние равновесия будет устойчивым, только при нагреве твердой стенки. Слабое влияние концентрационных эффектов на свободной границе стабилизирует равновесие системы, причем для длинноволновых возмущений ($\alpha < 0.132$) критическое значение числа Марангони увеличивается и устойчивость возможна при подогреве свободной поверхности. При $\alpha > 0.132$ устойчивость будет наблюдаться во всем диапазоне длин волн.

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н., профессору Андрееву В.К. за помощь и ценные советы в работе над задачей.

Список литературы

[1] Андреев В.К., Захватаев В.Е., Рябицкий Е.А. Термокапилярная неустойчивость., *Новосибирск: Наука*, 2000, 280 с.. ...

[2] Ефимова М.В. Монотонные возмущения равновесного состояния двухслойной системы бинарных смесей // Журнал СФУ. Сер. Матем и физ. 2010. Т.3. Вып.4. С. 507-514.

[3] Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Т.16. Вып.3. С. 171-174.