Идентификация систем линейных разностных уравнений*

В.Г. Демиденко
Институт вычислительных технологий СО РАН
e-mail: `demidenko.v@gmail.com`

Исследуется задача идентификации коэффициентов систем линейных разностных уравнений теории управления. Получено описание множества решений, изучен модифицированный метод Прони для построения приближенных решений, установлены оценки аппроксимации.

В работе рассматривается задача идентификации коэффициентов системы линейных разностных уравнений, имеющей приложения в теории управления:

$$\mathbf{V}(k+1) + W\mathbf{V}(k) = B_1\mathbf{U}(k+1) + B_0\mathbf{U}(k), \quad k = 1, \ldots, M-1, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{V}(k) = (V_1(k), \ldots, V_N(k))^T,$$
$$\mathbf{U}(k) = (U_1(k), \ldots, U_L(k))^T,$$

а искомые матрицы W — размера $N \times N$, B_0, B_1 — размера $N \times L$, такие, что решения системы

$$\mathbf{Z}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}(k) \\ \mathbf{U}(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+L}, \quad k = 1, \ldots, M,$$

наиболее точно аппроксимируют векторы наблюдений

$$\mathbf{X}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_v(k) \\ \mathbf{X}_u(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+L}, \quad k = 1, \ldots, M, \tag{2}$$

$$\mathbf{X}_v(k) = (X_{v,1}(k), \ldots, X_{v,N}(k))^T,$$
$$\mathbf{X}_u(k) = (X_{u,1}(k), \ldots, X_{u,L}(k))^T.$$

Элементы матриц W, B_0, B_1 определяются при минимизации функционала

$$\sum_{k=1}^{M} \|\mathbf{X}(k) - \mathbf{Z}(k)\|^2 \to \min_{W, B_0, B_1, \mathbf{Z}}. \tag{3}$$

Исследованию задач вида (1)–(3) при наличии наблюдений (2), обеспечивающих однозначную разрешимость, посвящено большое число работ. При этом имеется ряд методов построения приближенных решений. Однако на практике зачастую решения задач идентификации не определяются однозначно (например, при достаточно малом M). Поэтому в таких случаях большой интерес представляет описание множества всех

*Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный интеграционный проект № 107).

решений задачи идентификации, а также способы построения приближенных решений. В настоящей работе мы рассматриваем такой случай при некоторых дополнительных условиях на векторы наблюдений и получаем ряд новых результатов о разрешимости задачи идентификации (1)–(3). В частности, нами исследованы модификации метода Прони решения задач идентификации для систем линейных разностных уравнений при малом числе наблюдений. Дано обоснование сходимости итерационных процессов модифицикаций метода Прони, получены оценки скорости сходимости. Получены оценки устойчивости решений задач идентификации относительно возмущений в данных наблюдений.

Наши исследования являются продолжением работ [1–4], при этом мы используем идею модифицированного метода Прони, предложенного М. Осборном и А.О. Егоршиным независимо друг от друга в случае, когда имеется достаточное число векторов наблюдения для однозначного решения задачи идентификации. Отметим, что этот метод является очень эффективным для приближенного построения решений практических задач.

Приведем описание схемы модифицированного метода Прони для решения задачи идентификации коэффициентов системы линейных разностных уравнений (1). Идея нахождения матриц W, B_0, B_1 состоит в сведении задачи минимизации (3) к решению задачи минимизации:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle \to \min_{W,B_0,B_1}, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(W, B_0, B_1, \mathbf{X}) = \mathcal{X}^T \left(AA^T\right)^{-1} \mathcal{X}$$

— матрица размера $(N(N+2L)+1) \times (N(N+2L)+1)$,

$$\mathcal{X} =$$

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{X}_v^T(1)\ \mathbf{X}_u^T(1)\ \mathbf{X}_u^T(2) & & 0 & -X_{v,1}(2) \\
 & \ddots & & \\
0 & & \mathbf{X}_v^T(1)\ \mathbf{X}_u^T(1)\ \mathbf{X}_u^T(2) & -X_{v,N}(2) \\
\mathbf{X}_v^T(2)\ \mathbf{X}_u^T(2)\ \mathbf{X}_u^T(3) & & 0 & -X_{v,1}(3) \\
 & \ddots & & \\
0 & & \mathbf{X}_v^T(1)\ \mathbf{X}_u^T(1)\ \mathbf{X}_u^T(2) & -X_{v,N}(3) \\
 & \vdots & & \\
\mathbf{X}_v^T(M-1)\mathbf{X}_u^T(M-1)\mathbf{X}_u^T(M) & & 0 & -X_{v,1}(M) \\
 & \ddots & & \\
0 & & \mathbf{X}_v^T(M-1)\mathbf{X}_u^T(M-1)\mathbf{X}_u^T(M) & -X_{v,N}(M)
\end{pmatrix}$$

— матрица размера $(M-1)N \times (N(N+2L)+1)$,

$$A = \begin{pmatrix}
(W\ B_0) & (-I\ B_1) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & (W\ B_0) & (-I\ B_1) & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & (W\ B_0) & (-I\ B_1)
\end{pmatrix}$$

— матрица размера $(M-1)N \times M(N+L)$,

$$\mathbf{v} = \left(\mathbf{w}^1, \mathbf{B}_0^1, \mathbf{B}_1^1, \ldots, \mathbf{w}^N, \mathbf{B}_0^N, \mathbf{B}_1^N, 1\right)^T$$

— вектор размера $(N(N+2L)+1)$. Здесь мы обозначили j-ю строку матрицы W через $\mathbf{w}^j$, j-е строки матриц B_i, $i=0,1$, через $\mathbf{B}_i^j$.

Функционал (4) можно записать в виде

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 \left\langle \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \mathbf{B}\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\rangle,$$

поэтому решение задачи минимизации (4) можно проводить на единичной сфере $\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{(N(N+2L)+1)} : \|\mathbf{z}\| = 1\}$. Для ее решения по аналогии с [5] мы будем использовать *модификацию метода обратной итерации*, суть которой заключается в построении последовательности $\left\{\mathbf{z}^k\right\}$ такой, что

$$\mathbf{z}^k \to \mathbf{z}^* \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

при этом

$$\langle \mathbf{z}^*, \mathbf{B}\mathbf{z}^* \rangle = \min_{W, B_0, B_1, \|\mathbf{z}\|=1} \langle \mathbf{z}, \mathbf{B}\mathbf{z} \rangle.$$

Алгоритм построения последовательности $\left\{\mathbf{z}^k\right\}$ следующий:

0. Пусть $\mathbf{z}^0 \in \mathbb{R}^{(N(N+2L)+1)}$ — начальный вектор такой, что

$$\|\mathbf{z}^0\| = 1, \quad z_n^0 \neq 0, \quad n = N(N+2L)+1.$$

Для $k = 1, 2, 3, \ldots$

1. Находится вектор $\mathbf{z}^k$ такой, что $\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{z}^k = \mathbf{z}^{k-1}$, где

$$\mathbf{B}_{k-1} = \mathbf{B}(W_{k-1}, (B_0)_{k-1}, (B_1)_{k-1}, \mathbf{X}),$$

а матрицы W_{k-1}, $(B_0)_{k-1}$, $(B_1)_{k-1}$ определяются вектором $\mathbf{z}^{k-1}$.

2. Выписывается матрица

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{B}(W_k, (B_0)_k, (B_1)_k, \mathbf{X}).$$

3. Нормировка: $\mathbf{z}^k := \frac{\mathbf{z}^k}{\|\mathbf{z}^k\|}$.

Если итерационный процесс сходится, то мы получим последовательность приближенных решений исходной задачи (1)–(3).

Численные расчеты показывают высокую скорость сходимости такого итерационного процесса. Однако теоретического обоснования его сходимости ранее проведено не было. Следует отметить, что оно не очевидное в силу того, что указанный итерационный процесс является модификацией метода обратной итерации для *нелинейной* спектральной задачи.

Следуя схеме рассуждений из [1, 2], мы доказываем сходимость этого итерационного процесса для некоторого характерного класса наблюдений (2), возникающих на практике. Дадим описание такого класса.

Пусть
$$\lambda_j(\mathbf{B}), \quad j=1,\dots,n, \quad n=N(N+2L)+1$$
— собственные значения матрицы $\mathbf{B}=\mathbf{B}(W,B_0,B_1,\mathbf{X})$. В силу симметричности и неотрицательной определённости матрицы $\mathbf{B}$ они неотрицательные. Упорядочим их в порядке возрастания:
$$0\le\lambda_1(\mathbf{B})\le\lambda_2(\mathbf{B})\le\dots\le\lambda_n(\mathbf{B}).$$

Мы будем предполагать, что выполнено следующее

Условие. *Будем считать, что вектор наблюдений $\mathbf{X}$ такой, что минимальное собственное значение $\lambda_1(\mathbf{B})$ матрицы $\mathbf{B}$ имеет кратность $p\ge 1$ и не зависит от матриц W размера $N\times N$ и матриц B_0, B_1 размера $N\times L$, при этом соответствующие им собственные векторы $\mathbf{v}_1(\mathbf{B}),\dots,\mathbf{v}_p(\mathbf{B})$ также не зависят от W, B_0, B_1:*
$$\lambda_1(\mathbf{B})=\ldots=\lambda_p(\mathbf{B})<\Lambda^*\le\lambda_{p+1}(\mathbf{B})\le\ldots\le\lambda_n(\mathbf{B}),$$
$$\lambda_j(\mathbf{B})\equiv\lambda_j(\mathbf{X})=\lambda_1, \quad \mathbf{v}_j(\mathbf{B})\equiv\mathbf{v}_j(\mathbf{X})=\mathbf{v}_j, \quad j=1,\dots,p.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_1>0$.

Теорема 1. *Пусть выполнено Условие. Если начальное приближение $\mathbf{z}^0\in\mathbb{R}^n$, $n=N(N+2L)+1$ не ортогонально собственным векторам $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_p$, и все векторы последовательности $\{\mathbf{z}^k\}$ имеют ненулевую последнюю компоненту, то итерационный процесс сходится:*
$$\mathbf{z}^k\to\mathbf{z}^* \ \ \textit{при} \ \ k\to\infty.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и начальный вектор $\mathbf{z}^0$ представим в виде линейной комбинации*
$$\mathbf{z}^0=\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\mathbf{v}_j+\sum_{l=p+1}^{n}\beta_l^0\mathbf{v}_l^0,$$
где
$$\alpha_j=\left\langle\mathbf{z}^0,\mathbf{v}_j\right\rangle, \quad \beta_l^0=\left\langle\mathbf{z}^0,\mathbf{v}_l^0\right\rangle,$$
$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_j^2+\sum_{l=p+1}^{n}\left(\beta_l^0\right)^2=1, \quad |\alpha|^2=\sum_{j=1}^{p}\alpha_j^2\ne 0.$$
Тогда искомый предельный вектор итерационного процесса можно записать в виде
$$\mathbf{z}^*=\frac{1}{|\alpha|}\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\mathbf{v}_j. \tag{5}$$

Оценка скорости сходимости итерационного процесса дается в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда имеет место оценка скорости сходимости итерационного процесса*
$$\left\|\mathbf{z}^k-\mathbf{z}^*\right\|\le\frac{1}{|\alpha|}\left[\frac{\lambda_1}{\min\limits_{W,B_0,B_1}\lambda_{p+1}\left(\mathbf{B}(W,B_0,B_1,\mathbf{X})\right)}\right]^k$$

$$+\frac{1}{2|\alpha|^3}\left[\frac{\lambda_1}{\min\limits_{W,B_0,B_1}\lambda_{p+1}\left(\mathbf{B}(W,B_0,B_1,\mathbf{X})\right)}\right]^{2k}, \quad k>1.$$

Замечание. Используя формулу (5) для вектора $\mathbf{z}^*$ можно выписать искомые матрицы W, B_0, B_1 системы (1). Для этого нужно записать вектор $\mathbf{z}^*$ в виде

$$\mathbf{z}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{z}_N^* \\ z_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad n = N(N+2L)+1, \quad z_n^* \neq 0,$$

и векторы $\mathbf{z}_j^* \in \mathbb{R}^{N+2L}$, $j = 1,\ldots,N$ выписать по-компонентно

$$\mathbf{z}_j^* = (z_{j,1}^*,\ldots,z_{j,N}^*, z_{j,N+1}^*,\ldots,z_{j,N+L}^*, z_{j,N+L+1}^*,\ldots,z_{j,N+2L}^*)^T.$$

Тогда матрицы W, B_0, B_1 имеют следующий вид

$$W = \begin{pmatrix} z_{1,1}^*/z_n^* & \ldots & z_{1,N}^*/z_n^* \\ & \vdots & \\ z_{N,1}^*/z_n^* & \ldots & z_{N,N}^*/z_n^* \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} z_{1,N+1}^*/z_n^* & \ldots & z_{1,N+L}^*/z_n^* \\ & \vdots & \\ z_{N,N+1}^*/z_n^* & \ldots & z_{N,N+L}^*/z_n^* \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} z_{1,N+L+1}^*/z_n^* & \ldots & z_{1,N+2L}^*/z_n^* \\ & \vdots & \\ z_{N,N+L+1}^*/z_n^* & \ldots & z_{N,N+2L}^*/z_n^* \end{pmatrix}.$$

Мы изучаем также задачу идентификации при малых возмущениях векторов наблюдения

$$\hat{\mathbf{X}}(k) = \mathbf{X}(k) + \Delta\mathbf{X}(k), \quad \Delta\mathbf{X}(k) \approx 0, \quad k = 1,\ldots,M.$$

По аналогии с результатами из [3, 4] мы устанавливаем непрерывную зависимость решения от векторов наблюдения и получаем оценки устойчивости.

На основе полученных результатов нами разработан комплекс программ, позволяющий эффективно решать рассматриваемые задачи на современных многопроцессорных архитектурах, в том числе при малом количестве наблюдений и большой размерности систем.

Автор выражает благодарность научному руководителю чл.-корр. РАН А.М. Федотову за полезные обсуждения работы.

Список литературы

[1] Демиденко В.Г. Восстановление параметров однородной линейной модели динамики генной сети // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 3. С. 51–59.

[2] Демиденко В.Г. Восстановление коэффициентов систем линейных разностных уравнений // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 45–53.

[3] Demidenko V.G. Stability Estimates in the Problem on Renewal of Coefficients of Linear Difference Equations // Proc. IASTED Intern. Conf. on Automation, Control and Information Technology (ACIT 2010). Novosibirsk. 2010. P. 280–286.

[4] Демиденко В.Г. Оценки устойчивости в задаче идентификации коэффициентов линейных разностных уравнений // Неклассические уравнения математической физики: Сб. науч. работ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. С. 62–81.

[5] Егоршин А.О. Метод наименьших квадратов и быстрые алгоритмы в вариационных задачах идентификации и фильтрации (метод ВИ) // Автометрия. 1988. Т. 1. С. 30–42.