# Интервальные итерационные методы для расчета установившихся режимов электрических систем

А.А.Ибрагимов
*Национальный университет Узбекистана*
*E-mail:* alim-ibragimov@mail.ru

В данной работе рассматривается задача, которая сводится к решению системы нелинейных уравнений, связывающих токи и напряжения в узлах электрической сети при интервальной недетерминированности исходных данных. Излагаются некоторые интервальные итерационные методы расчёта параметров установившихся режимов сетей. Проводится анализ сходимости этих методов.

## 1. Введение

Расчеты установившихся режимов являются основными при решении задач, связанных с проектированием и эксплуатацией электрических систем. Результаты этих расчетов используются при планировании режимов и оперативном управлении, а также служат базой для выполнения оптимизации, анализа устойчивости и надежности.

Большинство разработанных и используемых в настоящее время методов для расчёта режимов и потерь электроэнергии (ЭЭ) в сетях всех ступеней напряжения основаны на детерминированном представлении исходной информации, т.е. используют те или иные допущения. Фактически, имеющаяся исходная информация для расчетов обладает неопределённостью (является неполной или ограниченно достоверной), в частности, характеризуются заданием интервальных значений параметров элементов и режимов работы, обусловленным их естественным разбросом, вариацией в процессе функционирования, погрешностями измерений режимов или другими факторами.

Применение детерминированных или вероятностно-статистических методов для расчёта режимов и потерь ЭЭ не учитывает указанные выше особенности исходной информации. Результаты расчётов, получаемые в виде детерминированных значений также не отражают возможные диапазоны изменения режимных переменных. Применение же вероятностно-статистических методов требует получения большого объёма статистических данных и построения сложных моделей, что само по себе вызывает известную неопределённость. Поэтому основным направлением совершенствования методов расчёта режимов и потерь для повышения эффективности передачи и распределения ЭЭ является максимально возможная их адаптация к существующей информационной обеспеченности расчётов в энергосистеме или в каждом электросетевом предприятии. Одним из путей такого совершенствования является использование методов интервального анализа [1, 2, 3]. Интервальный подход позволяет внести математическую строгость в построение численных алгоритмов, учитывающих интервальную неопределенность значений параметров режима ЭС.

Применение интервального аппарата в теории ЭЦ не являются абсолютно новой методологией, в настоящее время по этой теме имеются достаточное количество работ исследователей из разных стран мира, например [4, 5, 6, 7]. Но поиск более эффективных методов расчета все ещё продолжается.

## 2. Постановка задачи

Математически задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами [8, 9], связывающих токи и напряжения в узлах сети:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \frac{s_i}{\dot{x}_i} - a_{i0}x_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь
$a_{ij}$ — элементы комплексной матрицы собственных и взаимных проводимостей системы;
$s_i$ — значение мощности в $i$-ом узле;
$x_i$ — вектор-столбец напряжений узлов, а $\dot{x}_i$ — комплексно-сопряженное число для $x_i$;
$a_{i0}$ — матрица-столбец проводимостей ветвей связи балансирующего узла с остальными узлами;
$x_0$ — напряжения балансирующего узла.

Параметры балансирующего узла $a_{i0}$ и $x_0$ считаются заданными, но могут и меняться в процессе решения более общей задачи. Система (1) является «разреженной» в том смысле, что большинство коэффициентов $a_{ij}$ равны нулю. Они отличны от нуля в том случае, если $i$-й и $j$-й узлы сети связаны непосредственно.

В дальнейшем изложении мы пользуемся обозначениями из проекта неформального международного стандарта [10]. В частности, интервальные величины выделяются в тексте жирным шрифтом, а неинтервальные никак не выделяются.

В интервальном анализе в качестве комплексных интервалов чаще всего используются прямоугольные и круговые комплексные интервалы. Соответствующие их множества обозначается через $\mathbb{IC}_{rect}$ и $\mathbb{IC}_{circ}$. Ниже мы будем рассматривать интервалы только из $\mathbb{IC}_{rect}$ и далее, для краткости обозначим это множество просто $\mathbb{IC}$:

$$\boldsymbol{a} = \{a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C} \mid a_1 \in \boldsymbol{a}_1, a_2 \in \boldsymbol{a}_2\}$$

для вещественных интервалов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{IR}$.

Теперь запишем систему (1) в интервальном виде, который соответствует режимным параметрам с интервальной неопределенностью:

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}x_j = \frac{\boldsymbol{s}_i}{\dot{x}_i} - a_{i0}x_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

или

$$\dot{x}_i \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}x_j = \boldsymbol{s}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Обозначая девую часть последней системы через $F(\boldsymbol{a}, x)$, можем записать её в кратком виде как

$$F(\boldsymbol{a}, x) = \boldsymbol{s} \text{ для } a \in \boldsymbol{a},\ s \in \boldsymbol{s}. \tag{4}$$

Для системы (3) объединенным множеством решений называют множество

$$\Xi(F, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{s}) = \{x \in \mathbb{C} | (\exists a \in \boldsymbol{a})(\exists s \in \boldsymbol{s})(F(a, x) = s)\}, \tag{5}$$

и ниже мы будем рассматривать задачу его внешнего интервального оценивания. Таким образом, нашей целью является нахождение, по-возможности, налучшего (т.е. наименьшего по включению) интервального вектора, ограничивающего множество решений $\Xi(F, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{s})$.

## 3. Основные определения

**Определение 1.** *Пусть* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{IC}$. *Тогда величина* $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}_1| + |\boldsymbol{a}_2|$ *называется абсолютной величиной или модулем интервала* $\boldsymbol{a}$.

**Определение 2.** *Пусть* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{IC}$. *То шириной интервала* $\boldsymbol{a}$ *будем называт величину* $\operatorname{wid}\boldsymbol{a} = \operatorname{wid}\boldsymbol{a}_1 + \operatorname{wid}\boldsymbol{a}_2$.

Введем Хаусдорфова метрику на пространстве $\mathbb{IC}^n$.

**Определение 3.** *Пусть* $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2], \boldsymbol{b} = [b_1, b_2] \in \mathbb{IR}$. *Тогда расстояние между элементами* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *вводится следующим образом:*

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

**Определение 4.** *Пусть* $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2], \boldsymbol{y} = [y_1, y_2] \in \mathbb{IR}^n$. *Тогда метрика на многомерном интервальном пространстве для векторов* $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$ *определяется как:*

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \max\{\| x_1 - y_1 \|, \| x_2 - y_2 \|\},$$

*где* $\| \cdot \|$ *— абсолютная векторная норма на* $\mathbb{R}^n$.

**Определение 5.** *Пусть* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + i\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + i\boldsymbol{y}_2 \in \mathbb{IC}^n$. *Тогда метрика на пространстве* $\mathbb{IC}^n$ *для векторов* $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$ *определяется соотношением:*

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) + \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2).$$

## 4. Интервальные итерационные методы расчета

При решении системы (2) возникает определенные сложности в реализации расчетов, так как приходится иметь дело с комплексными интервальными матрицами высокого порядка и с большими системами нелинейных уравнений. Для нелинейных систем уравнений естественно применять итерационные методы решения. При этом очень важна структура итерационного процесса, от нее будет зависеть удобство реализации процесса, скорость сходимости и качества интервального решения.

### 4.1. Метод простой итерации

Он определяется из соотношения

$$\boldsymbol{a}_{ii} x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j^{(k)} = \frac{\boldsymbol{s}_i}{\dot{x}_i^{(k)}} - a_{i0} x_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

в котором можно считать, что $0 \notin \boldsymbol{a}_{ii}$. В противном случае, при $0 \in \boldsymbol{a}_{ii}$, путём перестановки уравнений системы можно добиться того, чтобы все диагональные элементы неособенной матрицы системы не содержали нуля. Далее расчёт производится по формуле

$$\boldsymbol{x}_i^{(k+1)} := \boldsymbol{x}_i^{(k)} \cap \boldsymbol{a}_{ii}^{-1} \left( \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{x}_j^{(k)} + \frac{\boldsymbol{s}_i}{\dot{\boldsymbol{x}}_i^{(k)}} - a_{i0} x_0 \right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{x}_i^{(k)}$ и $\boldsymbol{x}_i^{(k+1)}$ — значения компонент интервального вектора решения $\boldsymbol{x}$, соответственно, при $k$-й и $(k+1)$-й итерациях.

### 4.2. Метод обратной итерации

Итерационная формула определяется из соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j^{(k)} = \frac{\boldsymbol{s}_i}{\dot{x}_i^{(k+1)}} - a_{i0}x_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

а затем расчёт производится по формуле

$$\boldsymbol{x}_i^{(k+1)} := \boldsymbol{x}_i^{(k)} \cap \dot{\boldsymbol{s}}_i \left( \sum_{j=0}^{n} \dot{\boldsymbol{a}}_{ij} \dot{\boldsymbol{x}}_j^{(k)} \right)^{-1}, \quad x_0^{(k)} = x_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

### 4.3. Метод обратной матрицы

Расчетная формула определяется из соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j^{(k+1)} = \frac{\boldsymbol{s}_i}{\dot{x}_i^{(k)}} - a_{i0}x_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

и, следовательно, расчёт производится по формуле

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} := \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{y}^{(k)}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}^{(k)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_1/\dot{\boldsymbol{x}}_1^{(k)} - a_{10}x_0 \\ \boldsymbol{s}_2/\dot{\boldsymbol{x}}_2^{(k)} - a_{20}x_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{s}_n/\dot{\boldsymbol{x}}_n^{(k)} - a_{n0}x_0 \end{pmatrix}.$

Итерационный расчёт продолжается по формулам (7),(9),(11), пока не выполнится условие $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{x}^{(k-1)}) < \epsilon$, где $\epsilon$ – требуемая точность.

Существует и другие итерационные методы решения рассматриваемой задачи, но мы в данной работе ограничиваемся приведенными выше.

## 5. Исследование на сходимость

В дальнейших рассуждениях мы опираемся на понятие нормы интервальных векторов и матриц. Векторная норма будет произвольной, причём справедливо $\|\boldsymbol{x}\| = \|\dot{\boldsymbol{x}}\|$ для любого интервального вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IC}^n$. Матричная норма определяется стандартно, как подчинённая норма

$$\|\boldsymbol{A}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

При условиях, наложенных на векторную норму, для любой диагональной интервальной матрицы $\boldsymbol{D}$ будем иметь $\|\boldsymbol{D}\| = \max_i |\boldsymbol{d}_{ii}|$.

### 5.1. Метод простой итерации

Обозначим $\boldsymbol{z}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}$. Тогда в силу (6), имеем

$$\boldsymbol{z}_i^{(k+1)} = \boldsymbol{x}_i^{(k+1)} - \boldsymbol{x}_i = -\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n} \frac{\boldsymbol{a}_{ij}}{\boldsymbol{a}_{ii}}(\boldsymbol{x}_j^{(k)} - \boldsymbol{x}_j) - \frac{\boldsymbol{s}_i}{\boldsymbol{a}_{ii}\dot{\boldsymbol{x}}_i\dot{\boldsymbol{x}}_i^{(k)}}(\dot{\boldsymbol{x}}_i^{(k)} - \dot{\boldsymbol{x}}_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

или в матричном виде

$$\boldsymbol{z}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{z}^{(k)} + \boldsymbol{D}_1^{(k)}\dot{\boldsymbol{z}}^{(k)}, \tag{12}$$

где

$$\boldsymbol{B} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{\boldsymbol{a}_{12}}{\boldsymbol{a}_{11}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{a}_{1n}}{\boldsymbol{a}_{11}} \\ \frac{\boldsymbol{a}_{21}}{\boldsymbol{a}_{22}} & 0 & \cdots & \frac{\boldsymbol{a}_{2n}}{\boldsymbol{a}_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\boldsymbol{a}_{n1}}{\boldsymbol{a}_{nn}} & \frac{\boldsymbol{a}_{n2}}{\boldsymbol{a}_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}_1^{(k)} = -\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{s}_1}{\boldsymbol{a}_{11}\dot{\boldsymbol{x}}_1\dot{\boldsymbol{x}}_1^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{s}_2}{\boldsymbol{a}_{22}\dot{\boldsymbol{x}}_2\dot{\boldsymbol{x}}_2^{(k)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\boldsymbol{s}_n}{\boldsymbol{a}_{nn}\dot{\boldsymbol{x}}_n\dot{\boldsymbol{x}}_n^{(k)}} \end{pmatrix}.$$

Используя (12) и учитывая $\|\boldsymbol{z}\| = \|\dot{\boldsymbol{z}}\|$, мы имеем

$$\|\boldsymbol{z}^{(k+1)}\| \le (\|\boldsymbol{B}\| + \|\boldsymbol{D}_1^{(k)}\|)\|\boldsymbol{z}^{(k)}\|,$$

и метод будет сходится, если $\|\boldsymbol{B}\| + \|\boldsymbol{D}_1^{(k)}\| \le q < 1$ при всех $k$.

Для оценки нормы интервальной матрицы $\boldsymbol{B}$ пригодны любые способы, используемые при решении интервальных систем линейных алгебраических уравнений (см., например, [3] стр. 88-89). Норма $\boldsymbol{D}_1^{(k)}$ будет равна $\max\limits_{1\le i\le n}\left|\dfrac{\boldsymbol{s}_i}{\boldsymbol{a}_{ii}\dot{\boldsymbol{x}}_i\dot{\boldsymbol{x}}_i^{(k)}}\right|$.

В процессе счета её можно принимать приближенно равной $\max\limits_{1\le i\le n}\dfrac{|\boldsymbol{s}_i|}{|\boldsymbol{a}_{ii}|\,|\boldsymbol{x}_i^{(k)}|^2}$.

### 5.2. Метод обратной итерации

В обозначениях из предыдущего пункта из (8) следует

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \left(\left(\frac{\boldsymbol{s}}{\dot{\boldsymbol{x}}^{(k+1)}} - a_0x_0\right) - \left(\frac{\boldsymbol{s}}{\dot{\boldsymbol{x}}} - a_0x_0\right)\right),$$

поэтому

$$\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\big) = -\frac{\boldsymbol{s}}{\dot{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}}^{(k+1)}}(\dot{\boldsymbol{x}}^{(k+1)} - \dot{\boldsymbol{x}}).$$

Теперь можем записать

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^{(k)} = -\boldsymbol{D}_2^{(k+1)}\dot{\boldsymbol{z}}^{(k+1)}, \qquad \text{так что} \qquad \dot{\boldsymbol{z}}^{(k+1)} = -\big(\boldsymbol{D}_2^{(k+1)}\big)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^{(k)},$$

где $\boldsymbol{z}^{(k)}$ и $\boldsymbol{A}$ имеют прежнее значение и $\boldsymbol{D}_2^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{s}_1}{\dot{\boldsymbol{x}}_1\dot{\boldsymbol{x}}_1^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{s}_2}{\dot{\boldsymbol{x}}_2\dot{\boldsymbol{x}}_2^{(k)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\boldsymbol{s}_n}{\dot{\boldsymbol{x}}_n\dot{\boldsymbol{x}}_n^{(k)}} \end{pmatrix}$.

Отсюда получаем, что $\|\boldsymbol{z}^{(k+1)}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\|\big(\boldsymbol{D}_2^{(k+1)}\big)^{-1}\|\|\boldsymbol{z}^{(k)}\|$.

### 5.3. Метод обратной матрицы

Воспользуемся теми же обозначениями, которые применялись для исследования сходимости методов простой и обратной итерации. Имеем $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^{(k+1)} = -\boldsymbol{D}_2^{(k)}\dot{\boldsymbol{z}}^{(k)}$, или $\boldsymbol{z}^{(k+1)} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}_2^{(k)}\dot{\boldsymbol{z}}^{(k)}$. Отсюда $\|\boldsymbol{z}^{(k+1)}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{D}_2^{(k)}\|\|\boldsymbol{z}^{(k)}\|$.

В последних двух случаях мы также имеем одну фиксированную матрицу $\boldsymbol{A}$ и одну переменную матрицу $\boldsymbol{D}_2^{(k)}$ или $\boldsymbol{D}_2^{(k+1)}$. Если матрицы $\boldsymbol{D}_2^{(k)}$ и $\boldsymbol{D}_2^{(k+1)}$ близки друг к другу в последних методах, то сходимость одного из методов будет означать расходимость другого, и наоборот.

## Список литературы


[1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления.* – Москва: Мир, 1987.

[2] Кальмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. *Методы интервального анализа.* – Новосибирск: Наука, 1986.

[3] Шарый С.П. *Конечномерный интервальный анализ.* – Электронная книга, см. `http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks`

[4] Киншт Н.В., Кац М.А. Интервальный анализ в задачах теории электрических цепей. // *Электричество.* 1999. №10. С. 45–57.

[5] Barboza L.V., Dimuro G.P., Reiser R.H.S. Interval Mathematics Applied to the Load Flow Analysis // Proc. of the 17-th IMACS World Congress Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation. Paris, France, 2005.

[6] Wang Z., Alvarado F.L. Interval Arithmetic in Power Flow Analysis. // *Transactions on Power Systems* vol. 7, n3, p. 1341-1349, 1992.

[7] Манусов В.В., Моисеев С.М., Перков С.Д. Интервальный анализ режимов электрических систем. // *Изв. вузов. Электромеханика* №9, 1998.

[8] Фазылов Х.Ф., Насыров Т.Х. *Установившиеся режимы электроэнергетических систем и их оптимизация.* – Ташкент: Молия, 1999.

[9] Жидков Н.П., Илышева Н.П., Тимофеев Д.В. О некоторых численных методах расчета электрических сетей // *Жур. выч. мат. и мат. физ.* Том 14, №5, стр. 1317–1323, 1974.

[10] Kearfott R.B., Nakao M.T., Neumaier A., Rump S.M., Shary S.P., Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis.// *Вычислительные технологии.* 2010. Т. 15, №1. С. 7—13. `http://www.ict.nsc.ru/interval/InteNotation.ps`.