Разрывы в шкале вероятностей. Интервальный анализ

Александр Харин

Московский физико-технический институт
Современная Гуманитарная Академия

В докладе с точки зрения интервального анализа рассмотрены разрывы на числовых отрезках и на шкале вероятностей. Доказана теорема существования разрывов. Выполнены оценки разрывов. Рассмотрены соотношения для интервалов средних значений.

1. Введение

В 2005 г. в [1] была выдвинута гипотеза о возможности существования смещений у границ шкалы вероятностей. В 2010 г. в [2] были доказаны теоремы о существовании разрывов у границ конечных интервалов и у границ шкалы вероятностей. Теоремы и их применения были представлены в [3], [4], [5], [6]. Теоремы позволяют, в т.ч., обосновать новые результаты в экономической теории и прогнозировании.

Возможность существования разрывов в шкале вероятностей должна проявляться и, действительно, проявляется в экономической реальности. Широко известен целый ряд фундаментальных парадоксов теории полезности, обусловленных возможностью существования этих разрывов. Как отмечено в [7] в 2006 г. Канеманом и Талером эти парадоксы, несмотря на многолетние усилия, до сих пор адекватно не решены современной экономической теорией.

В большинстве этих парадоксов наибольшие отклонения от предсказаний теории вероятностей наблюдались вблизи границ шкалы вероятностей. Из существования разрывов у границ шкалы вероятностей следует, что у каждой границы вероятность будет смещена на величину разрыва от границы - к середине шкалы.

Это соответствует результатам экспериментов и позволяет с единой точки зрения и без дополнительных предположений объяснить рассматриваемые парадоксы, в т.ч. парадокс Алле, "equity premium puzzle", преувеличение малых и преуменьшение больших вероятностей, проблему неприятия риска, "парадокс четырех областей" и другие парадоксы и проблемы.

Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей позволила обосновать корректирующую формулу прогнозирования.

В настоящем докладе разрывы в шкале вероятностей рассмотрены с точки зрения интервального анализа.

2. Общие условия

Предварительное замечание. Для простоты, в теореме условия на краях интервала приняты симметричными. Эти условия могут быть и асимметричными, что приведет к некоторому непринципиальному усложнению выкладок.

Пусть дана некоторая величина $\{p_k\}$: $k=1, 2, \dots K$: $K\leq\infty$.

Пусть известно, что распределение $\rho(p_k)$ величины $\{p_k\}$ имеет свойства

$$\sum_{k=1}^{K}\rho(p_k) = Const_\rho \qquad \text{и} \qquad 0 < Const_\rho < \infty .$$

По умолчанию будем считать

$$Const_\rho = 1 \equiv C_\rho .$$

Определим среднее значение величины $\{p_k\}$ как

$$M \equiv \sum_{k=1}^{K} p_k \rho(p_k) .$$

3. Теорема о существовании разрывов

Если, на отрезке $[A, B]$ величина $\{p_k\}$ известна с точностью до ненулевого интервала $\boldsymbol{P}$, такого, что

$$\underline{P} \geq A \quad \text{и} \quad \overline{P} \leq B , \quad \overline{P} - \underline{P} \equiv wid\, P \geq Const_P > 0 ,$$

$$\sum_{p_k \leq \underline{P}} \rho(p_k) \geq \Delta Const_\rho \equiv \Delta C_\rho \geq \Delta C_{\rho\min} > 0 ,$$

$$\sum_{p_k \geq \overline{P}} \rho(p_k) \geq \Delta C_\rho \geq \Delta C_{\rho\min} > 0 ,$$

то будут существовать ненулевые разрывы между границами отрезка $[A, B]$ и областями возможных значений границ интервала $\boldsymbol{M}$ среднего значения величины $\{p_k\}$.

Доказательство:

Из уравнения

$$(\underline{M} - \underline{P})(1 - \Delta C_\rho) = (\overline{P} - \underline{M})\Delta C_\rho$$

получаем

$$\underline{M} = \underline{P} + (\overline{P} - \underline{P})\Delta C_\rho .$$

Аналогично, из уравнения

$$(\overline{M} - \underline{P})\Delta C_\rho = (\overline{P} - \overline{M})(1 - \Delta C_\rho)$$

получаем

$$\overline{M} = \overline{P} - (\overline{P} - \underline{P})\Delta C_\rho .$$

Поскольку $\underline{P} \geq A$, то $\underline{M} \geq A + (\overline{P} - \underline{P})\Delta C_{\rho\min}$ и

$$wid\, R_{Rupture_A} \equiv \underline{M} - A \geq (\overline{P} - \underline{P})\Delta C_{\rho\min} = wid\, P\, \Delta C_{\rho\min} .$$

Поскольку $\overline{P} \leq B$, то $\overline{M} \leq B - (\overline{P} - \underline{P})\Delta C_{\rho\min}$ и

$$wid\, R_{Rupture_B} \equiv B - \overline{M} \geq wid\, P\, \Delta C_{\rho\min} .$$

Поскольку

$$wid\, P \geq Const_P > 0 , \text{ и } \Delta C_{\rho\min} > 0 ,$$

то между границами отрезка $[A, B]$ и границами интервала $\boldsymbol{M}$ среднего значения величины $\{p_k\}$ существуют ненулевые разрывы.

Теорема доказана.

Если вероятность удовлетворяет условиям, наложенным на величину $\{p_k\}$, и шкала вероятностей удовлетворяет условиям, наложенным на отрезок $[A, B]$, то теорема справедлива также для вероятности и шкалы вероятностей.

Заметим, что применение интервального анализа позволило доказать теорему не только для конечных, но и для бесконечных числовых отрезков.

4. Оценки

4.1. Общие оценки

Пусть наряду с интервалом $\boldsymbol{P}$, даны еще два интервала, прилегающие с обеих сторон к интервалу $\boldsymbol{P}$ и образующие вместе с ним общий интервал $\boldsymbol{P_{total}}$. Пусть эти интервалы: нижний $\boldsymbol{P_{bottom}}$, центральный $\boldsymbol{P}$, верхний $\boldsymbol{P_{top}}$ и общий $\boldsymbol{P_{total}}$ такие, что

$$\underline{P_{total}} = \underline{P_{bottom}} \le \overline{P_{bottom}} = \underline{P} < \overline{P} = \underline{P_{top}} \le \overline{P_{top}} = \overline{P_{total}} \;,$$

$$\sum_{P_{bottom}} \rho(p_k) = \Delta C_{\rho P_{Bottom}} > 0 \,, \quad \sum_{P_{top}} \rho(p_k) \ge \Delta C_{\rho P_{Top}} > 0$$

и

$$\sum_{P_{Total}} \rho(p_k) = \sum_{k=1}^{K} \rho(p_k) \,.$$

Центральный интервал $\boldsymbol{P}$ можно назвать вписанным с допусками $\Delta C_{\rho PBottom}$ и $\Delta C_{\rho PTop}$, а общий интервал $\boldsymbol{P_{total}}$ - описанным.

Запишем уравнения для $\boldsymbol{M}$:

Из уравнения

$$(\underline{M} - \underline{P_{Total}})\Delta C_{\rho P_{Bottom}} = (\underline{P} - \underline{M})(1 - \Delta C_{\rho P_{Bottom}} - \Delta C_{\rho P_{Top}}) + (\overline{P} - \underline{M})\Delta C_{\rho P_{Top}}$$

получаем

$$\sum_{P_{bottom}} \rho(p_k) = \Delta C_{\rho P_{Bottom}} > 0$$

и

$$\underline{M} = \underline{P} - wid\, P_{Bottom}\, \Delta C_{\rho P_{Bottom}} + wid\, P\, \Delta C_{\rho P_{Top}} \,.$$

Из уравнения

$$(\overline{M} - \underline{P})\Delta C_{\rho P_{Bottom}} + (\overline{M} - \overline{P})(1 - \Delta C_{\rho P_{Bottom}} - \Delta C_{\rho P_{Top}}) = (\overline{P_{Total}} - \overline{M})\Delta C_{\rho P_{Top}}$$

получаем

$$\begin{aligned} &\overline{M}(\Delta C_{\rho P_{Bottom}} + 1 - \Delta C_{\rho P_{Bottom}} - \Delta C_{\rho P_{Top}} + \Delta C_{\rho P_{Top}}) = \\ &= \underline{P}\Delta C_{\rho P_{Bottom}} + \overline{P}(1 - \Delta C_{\rho P_{Bottom}} - \Delta C_{\rho P_{Top}}) + \overline{P_{Total}}\Delta C_{\rho P_{Top}} = \\ &= \overline{P} - (\overline{P} - \underline{P})\Delta C_{\rho P_{Bottom}} + (\overline{P_{Total}} - \overline{P})\Delta C_{\rho P_{Top}} \end{aligned}$$

и

$$\overline{M} = \overline{P} - wid\, P\, \Delta C_{\rho Bottom} + wid\, P_{top}\, \Delta C_{\rho Top} \,.$$

4.2. Интервальные неравенства

Пусть нижний $\boldsymbol{P_{bottom}}$, центральный $\boldsymbol{P}$, и верхний $\boldsymbol{P_{top}}$ интервалы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &\underline{wid\, P_{Bottom}} \le wid\, P_{Bottom} \le \overline{wid\, P_{Bottom}} \,, \\ &\underline{wid\, P} \le wid\, P \le \overline{wid\, P} \,, \\ &wid\, P_{Top} \le wid\, P_{Top} \le wid\, P_{Top} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\underline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}} \le \Delta C_{\rho P_{Bottom}} \le \overline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}} \,, \\ &\underline{\Delta C_{\rho P_{Top}}} \le \Delta C_{\rho P_{Top}} \le \overline{\Delta C_{\rho P_{Top}}} \,. \end{aligned}$$

4.3. Оценка минимального разрыва

Рассмотрим разрыв у края B интервала $[A, B]$. Из общих оценок раздела 4.1 имеем

$$\overline{M} = \overline{P} - (\overline{P} - \underline{P})\Delta C_{\rho P_{Bottom}} + (\overline{P_{top}} - \underline{P_{top}})\Delta C_{\rho P_{Top}} .$$

Учитывая

$$\overline{P_{top}} = B ,$$

получаем для разрыва

$$\begin{aligned} B - \overline{M} &= \overline{P_{Top}} - \overline{P} + (\overline{P} - \underline{P})\Delta C_{\rho P_{Bottom}} - (\overline{P_{Top}} - \underline{P_{Top}})\Delta C_{\rho P_{Top}} = \\ &= (\overline{P_{Top}} - \underline{P_{Top}}) + (\overline{P} - \underline{P})\Delta C_{\rho P_{Bottom}} - (\overline{P_{Top}} - \underline{P_{Top}})\Delta C_{\rho P_{Top}} = \\ &= wid\, P\, \Delta C_{\rho P_{Bottom}} + wid\, P_{Top}\, (1 - \Delta C_{\rho P_{Top}}) \end{aligned} .$$

Минимальное значение разрыва достигается при

$$\underline{wid\, R_{rupture_B}} = \underline{wid\, P}\,\underline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}} + \underline{wid\, P_{Top}}(1 - \overline{\Delta C_{\rho P_{Top}}}) .$$

Легко видеть, что оценка, полученная в теореме в разделе 3 является абсолютным минимумом для этого выражения.

Для края A интервала $[A, B]$ рассмотрение полностью аналогично вышеприведенному. При этом, минимальное значение разрыва достигается при

$$\underline{wid\, R_{rupture_A}} = \underline{wid\, P}\,\underline{\Delta C_{\rho P_{Top}}} + \underline{wid\, P_{bottom}}(1 - \overline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}}) .$$

4.4. Оценка максимального разрыва

Из оценки раздела 4.3 имеем

$$wid\, R_{rupture_B} = wid\, P\, \Delta C_{\rho P_{Bottom}} + wid\, P_{Top}(1 - \Delta C_{\rho P_{Top}}) .$$

Максимальное значение разрыва достигается при

$$\overline{wid\, R_{rupture_B}} = \overline{wid\, P}\,\overline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}} + \overline{wid\, P_{Top}}\,(1 - \underline{\Delta C_{\rho P_{Top}}}) .$$

Для края A интервала $[A, B]$ результат полностью аналогичен вышеприведенному

$$\overline{wid\, R_{rupture_A}} = \overline{wid\, P}\,\overline{\Delta C_{\rho P_{Top}}} + \overline{wid\, P_{bottom}}\,(1 - \underline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}}) .$$

4.5. Оценка для величины медианы разрыва

Из оценок разделов 4.3 и 4.4 для величины медианы разрыва

$$\underline{wid\, R_{rupture_B}} = \underline{wid\, P}\,\underline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}} + \underline{wid\, P_{Top}}\,(1 - \overline{\Delta C_{\rho P_{Top}}}) ,$$

и

$$\overline{wid\, R_{rupture_B}} = \overline{wid\, P}\,\overline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}} + \overline{wid\, P_{Top}}\,(1 - \underline{\Delta C_{\rho P_{Top}}})$$

получаем для B

$$\begin{aligned} mid\, R_{ruptureB} &= \frac{1}{2}(\underline{wid\, P}\,\underline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}} + \overline{wid\, P}\,\overline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}}) + \\ &+ \frac{1}{2}(\underline{wid\, P_{Top}}\,(1 - \overline{\Delta C_{\rho P_{Top}}}) + \overline{wid\, P_{Top}}\,(1 - \underline{\Delta C_{\rho P_{Top}}})) \end{aligned} .$$

Аналогично получаем для A

$$mid\,R_{ruptureA} = \frac{1}{2}(\underline{wid\,P}\,\underline{\Delta C_{\rho P_{Top}}} + \overline{wid\,P}\,\overline{\Delta C_{\rho P_{Top}}}) + \\ + \frac{1}{2}(\underline{wid\,P_{Bottom}}\,(1-\overline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}}) + \overline{wid\,P_{Bottom}}\,(1-\underline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}}))\ .$$

При этом, для симметричного случая, очевидно,

$$\underline{\Delta C_{\rho}} \le 0.5$$

и в пределе,

$$\overline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}} \xrightarrow[\underline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}} \to 0.5]{} \underline{\Delta C_{\rho P_{Bottom}}}$$

и

$$\overline{\Delta C_{\rho P_{Top}}} \xrightarrow[\underline{\Delta C_{\rho P_{Top}}} \to 0.5]{} \underline{\Delta C_{\rho P_{Top}}}\ .$$

Заключение

В рамках интервального анализа доказана теорема существования разрывов для числовых отрезков и для шкалы вероятностей. Применение интервального анализа позволило доказать теорему не только для конечных, но и для бесконечных числовых отрезков.

Получены простые, но достаточно содержательные соотношения для интервалов средних значений и для разрывов. Выполнены оценки разрывов снизу и сверху и для медиан.

Благодарности

Автор хотел бы выразить благодарности:

Профессору Соложенцеву Е.Д., и к.т.н. Карасеву В.В. - за то, что они увидели более широкую перспективу в узкоспециальной работе автора по теории полезности, что привело автора к разработке принципа неопределенного будущего;

Профессору Новоселову А.А. – за то, что он увидел в работе автора перспективу для теории вероятностей и за терпеливую критику, которая побудила автора к доказательству теоремы о существовании разрывов на конечных отрезках и шкале вероятностей, а также за то, что он привил автору интерес к абстрактной математике. Этот интерес на долгое время определил основное направление работ автора.

Литература

[1] Harin, A. "A new approach to solve old problems" Game Theory and Information from Economics Working Paper Archive at WUSTL, 0505005, 2005.

[2] Харин, А.А. "Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей" IX Международная конференция по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий, Красноярск, 2010.

[3] Харин, А.А. "О разрывах в шкале вероятностей и о некоторых проблемах моделирования" Третья Международная конференция Математическое моделирование социальной и экономической динамики, 2010.

[4] Харин, А.А. "Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей, как математический базис принципа неопределенного будущего" Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в Сложных Системах: 10-я Международная Научная Школа МА БР – 2010.

[5] Харин, А.А. "Разрывы в шкале вероятностей и некоторые вопросы моделирования нестационарных экономических процессов" Труды 33-й Шаталинской международной научной школы-семинара "Системное моделирование социально-экономических процессов", 2010.
[6] Харин, А.А. Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей. Непрерывный случай 53-я научная конференция МФТИ, 2010.
[7] Kahneman, D. and Thaler, R. "Anomalies: Utility Maximization and Experienced Utility" Journal of Economic Perspectives, 20, #1, 221-234, 2006.