...

Моделирование процесса распространения МГД волн во вращающемся слое электропроводной несжимаемой жидкости в экваториальной широтной области

Сергей Иванович Перегудин
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: peregudinsi@yandex.ru

Светлана Евгеньевна Холодова
Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики
e-mail: kholodovase@yandex.ru

...

Проводится исследование трехмерной экваториальной динамики идеальной электропроводной неоднородной вращающейся жидкости. Предлагаемая математическая модель исследуемого физического процесса представляет собой замкнутую систему уравнений в частных производных, состоящую из уравнений гидродинамики с учетом вращения Земли, силы Лоренца и соответствующих уравнений магнитной динамики с необходимыми граничными условиями. Построено аналитическое решение системы уравнений в приближении экваториальной β–плоскости, описывающее распространение волн малой амплитуды.

Целью статьи является исследование волновых трехмерных крупномасштабных движений невязкой, несжимаемой стратифицированной идеально проводящей электропроводной вращающейся жидкости, сосредоточенной в сферическом экваториальном широтном поясе. Представленные исследования могут быть использованы в астрофизике и геофизике, в частности, при изучении процессов, происходящих в жидком ядре Земли и недрах звезд. Интерес к земному ядру обусловлен и тем, что оно оказывает существенное влияние на многие геофизические явления и процессы, происходившие и происходящие в Земле, которые могут проявляться и на ее поверхности.

В статье [1] представлено аналитическое решение задачи о квазигеострофических движениях во вращающемся слое электропроводной жидкости, позволяющее определить влияние рельефа мантии и динамики твердого ядра Земли на магнитогидродинамические характеристики волнового процесса в жидком ядре.

В статье [2] проведена редукция нелинейной системы уравнений в частных производных, моделирующей волновые движения в идеальной электропроводной вращающейся жидкости с учетом инерционных сил, сил тяжести, Кориолиса, Лоренца, а также имеющихся неоднородностей плотности, к скалярному линейному уравнению и сделан вывод об аналитическом представлении решения задачи о волнах малой амплитуды в рассматриваемой жидкости. Анализ полученного решения позволил установить факт существования установившегося режима колебаний при больших значениях времени, что служит подтверждением важной роли стратификации плотности жидкого ядра Земли, определяющей в целом ряде случаев его основную динамику, как важный фактор эволюции планеты.

Согласно имеющейся гипотезы С.И. Брагинского [3], в динамику магнитного поля существенный вклад вносит движение представленной жидкости непосредственно в тонком, примыкающем к мантии, слое. В статьях [4, 5] был проведен анализ и сделан вывод о справедливости указанной гипотезы для возмущений магнитогидродинамических полей, развивающихся вблизи некоторой точки сферического слоя вне экваториальной зоны. Особый интерес представляют возмущения магнитогидродинамических величин в экваториальном широтном поясе.

Вблизи экватора нормальная компонента угловой скорости вращения Земли представляет собой малую величину и обращается в нуль на экваторе, и, как следствие, геострофическое приближение перестает быть справедливым.

Итак, рассмотрим движение идеальной электропроводной несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости. Колебания малой амплитуды рассматриваемой жидкости описываются уравнениями в приближении экваториальной β–плоскости [6], а именно,

$$\rho_s\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}-yv_y\right)+\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{1}{\mu}\mathcal{D}b_x=0, \tag{1}$$

$$\rho_s\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+yv_y\right)+\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{1}{\mu}\mathcal{D}b_y=0, \tag{2}$$

$$\rho=-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\eta}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_s v_z\right)+\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}+\frac{\partial b_z}{\partial z}=0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}=\mathcal{D}\mathbf{v}+\mathbf{b}_0\frac{\rho_s'}{\rho_s}v_z, \tag{6}$$

где $\mathbf{b}$ — вектор магнитной индукции, $\mathbf{v}$ — скорость жидкости в системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω, p — давление, ρ — плотность, g — величина ускорения силы тяжести, $\eta=\rho_s p+\dfrac{1}{\mu}\left(b_{0x}b_x+b_{0y}b_y\right)$, $\mathcal{D}=\langle\mathbf{b}_0,\nabla\rangle$ — дифференциальный оператор. Предполагается, что магнитная проницаемость μ постоянна. Для замыкания системы (1)–(6) необходимо привлечь термодинамическое уравнение, которое в отсутствие диссипации сводится к уравнению сохранения плотности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-S(z)v_z=0, \tag{7}$$

где $S(z)=-\left(\dfrac{R}{L}\right)^2\dfrac{1}{\rho_s(z)}\dfrac{\partial\rho_s(z)}{\partial z}$ — параметр стратификации, $R=\dfrac{\sqrt{gD}}{\beta_0 L}$ — экваториальный радиус деформации Россби. Далее учитываем соотношение $S=O(1)$, что вытекает из наблюдений и не требует априори [7].

Исключив функцию ρ из уравнения (7) и результата дифференцирования уравнения (3) по t и считая вертикальный масштаб плотности большим вертикального масштаба вертикального движения, т.е. учитывая малость величины $\dfrac{1}{\rho_s(z)}\dfrac{\partial\rho_s(z)}{\partial z}$, систему (1)–(6), представим в форме

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - yv_y + \frac{\partial\widetilde{\eta}}{\partial x} - \frac{1}{\mu\rho_s}\mathcal{D}b_x = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + yv_x + \frac{\partial\widetilde{\eta}}{\partial y} - \frac{1}{\mu\rho_s}\mathcal{D}b_y = 0, \tag{9}$$

$$v_z = -\frac{1}{S(z)}\frac{\partial^2\widetilde{\eta}}{\partial t\partial z}, \qquad \rho = -\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{10}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{11}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t} = \mathcal{D}\mathbf{v}, \tag{13}$$

$$\widetilde{\eta} = p + \frac{1}{\mu\rho_s}\left(b_{0x}b_x + b_{0y}b_y\right). \tag{14}$$

Рассмотрим далее некоторые частные, но содержательные примеры распространения нестационарных волн в экваториальном широтном поясе. Полагая $b_{0x} = b_{0y} = 0$, уравнения (8), (9) с учетом уравнения индукции (13) запишем следующим образом:

$$\left(\mathcal{D}_t{}^2 - \frac{1}{\mu\rho_s}\mathcal{D}^2\right)v_x - y\mathcal{D}_t v_y + \frac{\partial^2 p}{\partial t\partial x} = 0, \tag{15}$$

$$\left(\mathcal{D}_t{}^2 - \frac{1}{\mu\rho_s}\mathcal{D}^2\right)v_y + y\mathcal{D}_t v_x + \frac{\partial^2 p}{\partial t\partial y} = 0. \tag{16}$$

Исследуем далее возможность существования нетривиальных волновых возмущений, для которых y-компонента скорости v_y тождественно равна нулю. Полагая v_y равным нулю и исключая давление из уравнений (15) и (16), получим уравнение для x-компоненты скорости v_x:

$$\left(\mathcal{D}_t{}^2 - \frac{1}{\mu\rho_s}\mathcal{D}^2\right)\frac{\partial v_x}{\partial y} - y\mathcal{D}_t\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \tag{17}$$

общее решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} v_x = e^{-\dfrac{y^2}{2\nu_1^2}}\Bigg[&d_1\sin\frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2+\nu_1^2}}(x+\alpha t) + d_2\cos\frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2+\nu_1^2}}(x+\alpha t) + \\ &+ d_3\sin\frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2-\nu_1^2}}(x-\alpha t) + d_4\cos\frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2-\nu_1^2}}(x-\alpha t)\Bigg]\times \\ &\times\left[C_1 J_0\left(\frac{2|\lambda_1|\sqrt{\mu\rho_s(z)}}{b_{0z}SF}\right) + C_2 Y_0\left(\frac{2|\lambda_1|\sqrt{\mu\rho_s(z)}}{b_{0z}SF}\right)\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Примем следующие граничные условия при $z = 0$:

$$\begin{gathered} v_z = 0, \\ b_x = 0, \qquad b_y = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Учитывая, что мы ищем решения, сосредоточенные вблизи границы жидкого ядра с мантией, потребуем выполнения условий

$$\begin{gathered} v_x \to 0, \\ b_x \to 0, \qquad b_y \to 0 \qquad \text{при} \qquad z \to -\infty. \end{gathered} \tag{20}$$

Интегрируя уравнение (13) по времени, получим выражения для компонент индукции магнитного поля:

$$\begin{gathered} b_x(x,y,z,t) = b_{0z} e^{-\dfrac{y^2}{2\nu_1^2}} \left[\frac{C_1|\lambda_1|\sqrt{\mu}\rho_s'(z)}{b_{0z}SF\sqrt{\rho_s(z)}} J_0' \left(\frac{2|\lambda_1|\sqrt{\mu\rho_s(z)}}{b_{0z}SF} \right) + \right. \\ \left. + \frac{C_2|\lambda_1|\sqrt{\mu}\rho_s'(z)}{b_{0z}SF\sqrt{\rho_s(z)}} J_0' \left(\frac{2|\lambda_1|\sqrt{\mu\rho_s(z)}}{b_{0z}SF} \right) \right] \\ \times \left[- \frac{d_1\sqrt{\alpha^2+\nu_1^2\alpha}}{\alpha|\lambda_1|} \cos \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2+\nu_1^2\alpha}}(x+\alpha t) + \frac{d_2\sqrt{\alpha^2+\nu_1^2\alpha}}{\alpha|\lambda_1|} \sin \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2+\nu_1^2\alpha}}(x+\alpha t) + \right. \\ + \frac{d_3\sqrt{\alpha^2-\nu_1^2\alpha}}{\alpha|\lambda_1|} \cos \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2-\nu_1^2\alpha}}(x-\alpha t) - \\ \left. - \frac{d_4\sqrt{\alpha^2-\nu_1^2\alpha}}{\alpha|\lambda_1|} \sin \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2-\nu_1^2\alpha}}(x-\alpha t) \right] + C_3(x,y,z), \end{gathered} \tag{21}$$

$$b_y(x,y,z,t) = b_y(x,y,z,t),$$

$$\begin{gathered} b_z(x,y,z,t) = -b_{0z} e^{-\dfrac{y^2}{2\nu_1^2}} \left[C_1 J_0 \left(\frac{2|\lambda_1|\sqrt{\mu\rho_s(z)}}{b_{0z}SF} \right) C_2 Y_0 \left(\frac{2|\lambda_1|\sqrt{\mu\rho_s(z)}}{b_{0z}SF} \right) \right] \times \\ \times \left[\frac{d_1}{\alpha} \sin \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2+\nu_1^2\alpha}}(x+\alpha t) + \frac{d_2}{\alpha} \cos \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2+\nu_1^2\alpha}}(x+\alpha t) - \right. \\ \left. - \frac{d_3}{\alpha} \sin \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2-\nu_1^2\alpha}}(x-\alpha t) - \frac{d_4}{\alpha} \cos \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2-\nu_1^2\alpha}}(x-\alpha t) \right] + C_5(x,y,z). \end{gathered} \tag{22}$$

Интегрируя уравнение неразрывности по z, получим выражение для вертикальной компоненты скорости:

$$v_z(x,y,z,t) = -e^{-\dfrac{y^2}{2\nu_1^2}} \left[\frac{d_1|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2+\nu_1^2\alpha}} \cos \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2+\nu_1^2\alpha}}(x+\alpha t) - \right.$$

$$-\frac{d_2|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2+\nu_1^2\alpha}}\sin\frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2+\nu_1^2\alpha}}(x+\alpha t)+\frac{d_3|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2-\nu_1^2\alpha}}\cos\frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2-\nu_1^2\alpha}}(x+\alpha t)-$$

$$\left.-\frac{d_4|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2-\nu_1^2\alpha}}\sin\frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2-\nu_1^2\alpha}}(x+\alpha t)\right]\times$$

$$\times\int\left[C_1J_0\left(\frac{2|\lambda_1|\sqrt{\mu\rho_s(z)}}{b_{0z}SF}\right)+C_2Y_0\left(\frac{2|\lambda_1|\sqrt{\mu\rho_s(z)}}{b_{0z}SF}\right)\right]dz+C_4(x,y,t). \tag{23}$$

Из первого равенства условий (19) получаем, что

$$C_4(x,y,t)=\widetilde{u}'_x(x,t)u_1(y)\int\widetilde{G}dz\Big|_{z=0},$$

выполнение второго равенства условий (19) приводит к равенству $C_2=0$ и к определению числа $|\lambda_1|$:

$$|\lambda_1|=\frac{\gamma_0^2SFb_{0z}}{2\sqrt{\mu\rho_s(0)}},$$

где γ_0^2 — нуль функции Бесселя J_1. Функция $b_y(x,y,z)$ связана с произвольными функциями $C_3(x,y,z)$ и $C_5(x,y,z)$ соотношением

$$\frac{\partial C_3}{\partial x}+\frac{\partial C_5}{\partial z}+\frac{\partial b_y}{\partial y}=0,$$

которое является следствием уравнения индукции магнитного поля. Пусть

$$C_3(x,y,z)=\Re e\, ye^{ikx-\frac{y^2}{2}}ze^z,\qquad C_5(x,y,z)=\Re e\, ye^{ikx-\frac{y^2}{2}}(z-1)e^z,$$

тогда

$$b_y(x,y,z)=\Re e\left((1+ik)e^{ikx-\frac{y^2}{2}}ze^z\right),$$

и, следовательно, третье равенство граничных условий (19) также выполняется. Условие (20) выполняется вследствие известного поведения функций Бесселя при больших значениях аргумента и учета того, что функция $\rho'_s(z)$ в условиях рассматриваемой задачи при больших z равна нулю. Давление и плотность определяются из уравнений (10) соотношениями

$$p(x,y,z,t)=-S\int\limits_0^t\int\limits_0^z v_z(x,y,\widetilde{z},\tau)\,d\tau dz,\qquad \rho(x,y,z,t)=S\int\limits_0^t v_z(x,y,z,\tau)\,d\tau dz.$$

Таким образом, проведенный анализ свидетельствует о существовании в экваториальной зоне волн Кельвина, распространяющихся к востоку и к западу, причем зональная скорость в волне Кельвина не удовлетворяет геострофическому соотношению, что следует из уравнения (9), как это обычно бывает в неэлектропроводной жидкости. Вклад в отклонение от геострофичности скорости вносит наличие магнитного поля, а именно, его меридиональная компонента.

Список литературы

[1] Холодова С.Е. Квазигеострофические движения во вращающемся слое электропроводной жидкости // Прикладная механика и техническая физика, 2009, № 1, Т. 50, С. 30-41.

[2] Холодова С.Е. Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008.Т. 48, № 5, С. 882-898.

[3] Брагинский С.И. Волны в устойчиво стратифицированном слое на поверхности земного ядра // Геомагнетизм и аэрономия, 3, 476–482, 1987.

[4] Холодова С.Е. Математическое моделирование крупномасштабных движений стратифицированной электропроводной жидкости в сферическом слое // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета, Сер. 10, 2009, вып. 1, С. 118-133.

[5] Перегудин С.И., Холодова С.Е. Об интегрировании системы нелинейных уравнений в частных производных, моделирующей геострофические движения во вращающемся сферическом слое // Процессы управления и устойчивость: Труды 39-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н. В. Смирнова, Г. Ш. Тамасяна. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2009. С. 181-190.

[6] Перегудин С.И., Холодова С.Е. Об особенностях динамики МГД волн в экваториальной области // Динамика неоднородных систем. Труды ИСА РАН. Т. 49(1) / Под редакцией Ю.С. Попкова. — М.: ЛЕНАНД, 2010. С. 115–122.

[7] Брагинский С.И. Магнито-гидродинамика земного ядра // Геомагн. и аэроном. 1964. Т. 4. № 5. С. 898–916.