ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТОК ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ С ПОМОЩЬЮ ТЕРМОПАРЫ В ТВЕРДОМ ТОПЛИВЕ ПРИ ЕГО ГОРЕНИИ

А.Д. Рычков
Институт вычислительных технологий СО РАН
e-mail: rych@ict.nsc.ru

В.Д. Лисейкин,
e-mail: lvd@ict.nsc.ru

А.В. Кофанов
e-mail: avkof87@gmail.com

Рассматривается задача о взаимодействии термопары, впрессованной в твердое топливо, с тепловой волной, распространяющейся внутрь топлива от движущейся поверхности горения. Вследствие большой разницы в значениях коэффициентов теплопроводности топлива и материала вещества происходит сток тепла по проволочкам термопары вглубь топлива, что значительно изменяет температуру спая, искажая тем самым показания термопары. Для численного решения уравнения теплопроводности применялась криволинейная разностная сетка, для построения которой использовались уравнения Бельтрами. Результаты численного моделирования показали наличие существенной погрешности при измерении температуры с помощью термопары, причем величина погрешности зависит как от скорости горения топлива, так и от геометрических размеров термопары.

Ключевые слова: численное моделирование, теплопередача в твердых телах, конечно-разностные методы, измерение температуры с помощью термопар.

1. Введение

Подповерхностные термопарные датчики находят широкое применение в различных технических устройствах для измерения тепловых потоков в сложных теплонапряженных конструкциях [1], а также в различных теплообменных устройствах [2] и при горении унитарных твердых топлив [3, 4, 5]. При этом возникают проблемы оценки достоверности величин, определяемых на основе показаний термопар. Источником погрешностей служит различие теплофизических свойств материала термопары и исследуемого вещества. При наличии больших градиентов температуры в нагреваемом веществе происходит, как правило, увеличенный отток тепла от поверхности, поскольку теплопроводность металлических термопар оказывается более высокой, чем теплопроводность вещества исследуемого объекта. Дополнительные сложности в эти проблемы привносит переменность расстояния до поверхности теплообмена, обусловленная пиролизом (уносом) вещества.

2. Математическая модель взаимодействия тепловой волны с термопарой

Рассмотрим процесс измерения профиля температуры в конденсированном веществе, пиролизующегося под воздействием внешнего теплового источника. Сформулируем трехмерную нестационарную задачу о теплообмене между твердым веществом и запрессованной в него термопарой (рис. 1), в предположении, что скорость пиролиза вещества и температура его поверхности постоянны.

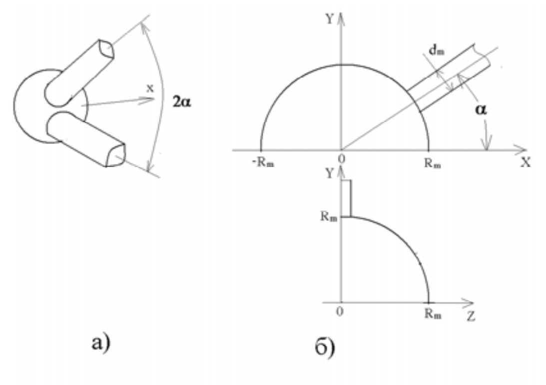

Рис. 1. Конструктивная схема термопары (а) и область решения (б)

Головка термопары представляет собой сферу радиуса R_m, которую под некоторым углом 2α пересекают два цилиндрических проводника с радиусами r_mкаждый. В этом случае имеются две плоскости симметрии, что позволяет уменьшить размер расчетной области до четверти от полной. Вид области решения показан на рис. 1а. Значения угла α изменялись от $\alpha = 0$ до $\alpha = 60^0$. Полагалось, что при $\alpha = 0$ проволочки расположены настолько близко друг к другу, что их можно заменить одной проволочкой с удвоенной площадью сечения. В декартовой системе координат эта область представляет собой параллелепипед

$$D\{x_s(y,z,t) \le x \le x_{\max}, 0 \le y \le y_{\max},\ 0 \le z \le z_{\max},\ t \ge 0\},$$

внешние границы которого выбираются на достаточно большом расстоянии от головки термопары, так, чтобы процессы теплообмена между веществом и термопарой не влияли на распределение температуры на них. Левая граница области является плоской поверхностью пиролиза, которая перемещается вглубь вещества с постоянной скоростью, так что ее положение определяется соотношением

$$x_s(y,z,t) = x_s(y,z,0) + r_b t.$$

Начало координат находится в геометрическом центре шаровой головки термопары. Уравнение теплопроводности в области D записывается в дивергентной форме

$$\frac{\partial(\rho C T)}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial T}{\partial z})\right) = 0, \tag{1}$$

где $C,\ \rho,\ \lambda$ – удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности.

Эти величины полагаются постоянными, но различными в областях, занятых веществом и термопарой, на границах между которыми они меняются скачком.

Запись уравнения (1) в дивергентной форме обеспечивает правильный расчет тепловых потоков в случае разрывных значений теплофизических параметров.

Для уравнения (1) задавались следующие граничные условия:

$$T(x_s,\, y, z, t) = T_s; \quad \left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}\right|_{x=x_{\max}} = 0, \quad \left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\right|_{y=y_{\max}} = \left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\right|_{z=z_{\max}} = \left.\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0} = 0.$$

Начальные условия задавались из известного распределения Михельсона, описывающего распределение температуры в плоской тепловой волне, движущейся вдоль оси OX с постоянной скоростью r_b

$$T(x,y,z,0) = T_0 + (T_s - T_0)\exp(-r_b(x - x_s(0))C_p\rho_p/\lambda_p),$$

где индекс p относится к параметрам вещества; T_s, T_0 – температура пиролиза и начальная температура, которые полагались постоянными. Начальное положение левой границы $x = x_s(0)$ выбирается достаточно далеко от вершины головки термопары так, чтобы распределение температуры в термопаре было близко к T_0.

3. Численный метод решения

Для численного решения уравнения (1) применялся метод конечных объемов, позволяющий проводить расчеты на произвольной конечно – разностной сетке. Уравнение записывалось в интегральной форме для произвольного фиксированного объема V:

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t} Q\, dV + \oint\limits_S \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = 0, \tag{2}$$

где $Q = C\,\rho T$; $\mathbf{F} = -\lambda \nabla T$ – поток тепла через ориентированный по нормали элемент $d\mathbf{S}$ поверхности S, ограничивающей объем V. В области D построим произвольную разностную сетку, каждая ячейка которой топологически эквивалентна параллелепипеду. Обозначим объем такой ячейки через $V_{i,j,k}$ и среднее значение величины Q на n – том слое по времени, отнесенное к центру такой ячейки, через $Q^n_{i,j,k}$. Тогда уравнение (2) аппроксимируется следующим разностным соотношением со вторым порядком точности по времени и по пространству:

$$\begin{gathered} \frac{4Q^{n+1}_{i,j,k} - 3Q^n_{i,j,k} + Q^{n-1}_{i,j,k}}{2\tau} V_{i,j,k} + \big[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1}_{i+1/2} - (\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1}_{i-1/2} + \\ + (\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1}_{j+1/2} - (\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1}_{j-1/2} + (\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1}_{k+1/2} - (\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1}_{k-1/2}\big] = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где τ – шаг по времени. Скалярные произведения в квадратных скобках являются потоками тепла через соответствующие площади граней объема $V_{i,j,k}$, умноженными на единичные нормали к ним. Способ их вычисления описан в [6]. Полученная разностная схема является неявной и для ее решения можно применить следующую итерационную схему, основанную на введении псевдовремени на каждом временном слое по времени.

$$\begin{gathered} \Big[\frac{Q^{n+1,s+1}_{i,j,k} - Q^{n+1,s+1}_{i,j,k}}{\tau_1} + \frac{4Q^{n+1,s}_{i,j,k} - 3Q^n_{i,j,k} + Q^{n-1}_{i,j,k}}{2\tau}\Big] V_{i,j,k} + \big[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1,s}_{i+1/2} - (\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1,s}_{i-1/2} + \\ + (\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1,s}_{j+1/2} - (\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1,s}_{j-1/2} + (\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1,s}_{k+1/2} - (\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1,s}_{k-1/2}\big] = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

где τ_1 – шаг по псевдовремени; s – номер итерации по псевдовремени.

Для реализации (4) используется схема расщепления по пространственным переменным [7] (нижние индексы частично опущены):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta^{s+1/3}-\delta^{s}}{\tau_1}V_{i,j,k}-\Lambda_1\delta^{s+1/3}=\frac{4Q^{n+1,s}_{i,j,k}-3Q^{n}_{i,j,k}+Q^{n-1}_{i,j.k}}{2\tau}]V_{i,j.k}+\big[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1,s}_{i+1/2}-\\
&-(\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1,s}_{i-1/2}+(\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1,s}_{j+1/2}-(\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1,s}_{j-1/2}+(\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1,s}_{k+1/2}-(\mathbf{F}\cdot\mathbf{S})^{n+1,s}_{k-1/2}\big],\\
&\frac{\delta^{s+2/3}-\delta^{s+1/3}}{\tau_1}V_{i,j,k}+\Lambda_2\delta^{s+2/3}=0,\\
&\frac{\delta^{s+1}-\delta^{s+2/3}}{\tau_1}V_{i,j,k}+\Lambda_3\delta^{s+1}=0,\quad Q^{n+1,s+1}=Q^{n+1,s}+\delta^{s+1}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь δ^s – поправки к величине Q; Λ_1, Λ_2, Λ_3 – разностные операторы, учитывающие только вторые производные по соответствующим направлениям. После сходимости итераций по псевдовремени $\delta^s = 0$ и имеет место точная аппроксимация полного исходного уравнения. Граничные условия для δ^s задаются следующим образом. На левой границе $\delta^s = 0$, на остальных – “мягкие” граничные условия. Для вычисления величины Q на первом шаге по времени (n = 0) в схеме (5) использовалась аппроксимация по времени первого порядка точности, поскольку значения сеточной функции $Q^{-1}_{i,j,k}$ неизвестны.

Для построения криволинейной пространственной разностной сетки использовался метод, основанный на численном решении (схема стабилизирующей поправки) обращенных двумерных уравнений Бельтрами или диффузии относительно управляющей метрики [8]. Достоинство данного метода заключается в возможности построения адаптивных разностных сеток с заданными свойствами. В частности, используя управляющую метрику, можно контролировать сгущение узлов сетки. С помощью данной технологии в области D строилась криволинейная блочная разностная сетка, сгущающаяся к границам области, занятой термопарой и являющейся квазиортогональной вблизи границ раздела между веществом и термопарой. Такая сетка обеспечивала приемлемую точность расчетов при не слишком большом числе ее узлов.

В области между левой границей области и головкой термопары строилась неравномерная прямоугольная разностная сетка, что позволяло использовать метод “улавливания” поверхности пиролиза в узел сетки. Суть его в том, что шаг по времени выбирался так, чтобы на каждом последующем шаге по времени положение подвижной левой границы $x_s(t+\Delta t) = x_s(t) + r_b\Delta t$ совпадало с ближайшей к ней справа вертикальной линией разностной сетки. Тогда перестройки сетки в процессе решения не требуется. Положения верхней и правой границ области выбирались таким образом, чтобы они не оказывали существенного влияния на распределение температуры в области, занятой термопарой. Разностная сетка не согласовывалась с границами области, занимаемой термопарой. Поэтому значения коэффициента теплопроводности на границах ячеек вычислялись как среднее геометрическое между его значениями в центрах соседних ячеек. Значения величины $C\cdot\rho$ вычислялись в центрах ячеек с учетом доли значений этих величин для термопары и вещества в объеме ячейки.

Точность численного решения оценивалась расчетами на последовательно сгущающихся сетках. В результате было установлено, что разностная сетка с числом узлов в области D $110\times110\times100$ по осям координат обеспечивала относительную точность расчетов температуры около 0.1%.

4. Некоторые результаты расчетов

Расчеты проводились для двух радиусов головки термопары R_m, радиусы проволочек r_m определялись из соотношения $r_m/R_m = 0.2$. Использовались следующие значения теплофизических параметров:

$$\rho_p = 1.6[\text{г/см}^3], \quad \rho_m = 8[\text{г/см}^3], \quad C_p = 0.3[\text{кал/г} \cdot K], \quad C_m = 0.2[\text{кал/г} \cdot K],$$

$$\lambda_p = 0.00072\,[\text{кал/(см} \cdot \text{с} \cdot K)], \quad \lambda_m = 0.16[\text{кал/(см} \cdot \text{с} \cdot K)],$$

где индекс m относится к материалу термопары, индекс p – к материалу вещества. Температура поверхности пиролиза $T_s = 650\,K$, начальная температура $T_0 = 300\,K$.

Расчеты проводились до момента времени, когда поверхность пиролиза касалась головки термопары. Значения геометрических параметров термопары варьировались. Поскольку нет ясности с пространственным распределением структуры контактов металлов в спае, образующих головку термопары и формирующих ее ЭДС, в качестве точки, в которой определяется температура головки термопары, был принят ее геометрический центр. Температура в этой точке определялась осреднением по объему головки термопары V:

$$T_{av} = \iiint\limits_V T(x, y, z, t)dxdydz / \iiint\limits_V dxdydz.$$

Относительная погрешность измерения температуры термопарой определялась выражением

$$\delta = \frac{T_\infty - T_{av}}{T_\infty} \cdot 100\%,$$

где $T_\infty = T(0, y_{\max}, z_{\max}, t)$ - температура в точке, лежащей на внешней границе области решения, достаточно далеко удаленной от термопары.

Расчеты проводились при скорости пиролиза $r_b = 0.1\,[\text{см/с}]$. Результаты расчетов представлены в виде изменения относительной погрешности измерения температуры $\delta(\xi)$ от безразмерного расстояния между поверхностью пиролиза и головкой термопары $\xi = \dfrac{R_m - x_s(t)}{\Delta}$, где $\Delta = \dfrac{\lambda_p}{C_p \rho_p r_b}$ - ширина теплового фронта волны пиролиза. Штриховые линии соответствуют изменению отношения величин теплового потока от поверхности пиролиза в твердое вещество $q = [(-\lambda_p \dfrac{\partial T}{\partial x})\Big|_{\substack{x=x_s\\y=0\\z=0}}]/[(-\lambda_p \dfrac{\partial T}{\partial x})\Big|_{\substack{x=x_s\\y=y_{max}\\z=z_{max}}}]$ в точках на оси симметрии и на внешней границе. Ширина теплового фронта составляла $\Delta = 150\,\mu m$ при скорости пиролиза $r_b = 0.1[\text{см/с}]$. Поведение величины $\delta(\xi)$ показано на рис. 2, 3.

Видно, что конфигурация расположения проволочек, определяемая величиной угла α, оказывает существенное влияние на величину погрешности измерения. При этом наименьшее значение погрешности измерения обеспечивает применение термопары с наименьшим радиусом головки. Наличие максимума на кривых связано с тем, что по мере приближения фронта пиролиза к термопаре увеличивается отток тепла по проволочкам в глубину твердого вещества, однако затем при малых значениях ξ прогрев головки термопары резко возрастает, что и приводит к уменьшению величины $\delta(\xi)$.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что достоверность информации о распределении температуры в приповерхностном слое твердого вещества, толщина которого сравнима с шириной фронта тепловой волны пиролиза, может быть весьма ненадежной.

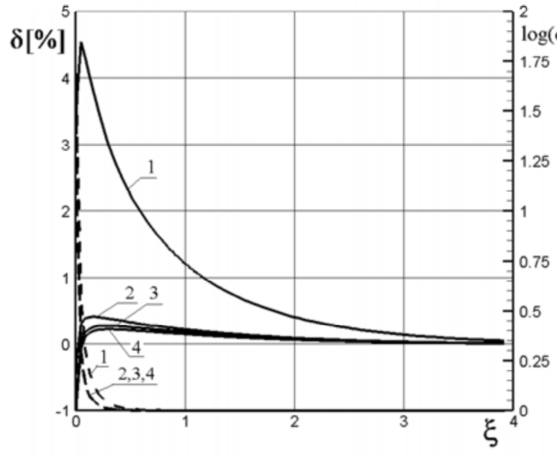

Рис. 2. Изменение $\delta(\xi)$ для $R_m = 12\mu m$ $(r_m/R_m = 0.2)$. $1 - \alpha = 0^0$; $2 - \alpha = 15^0; 3 - \alpha = 45^0$; $4 - \alpha = 60^0$

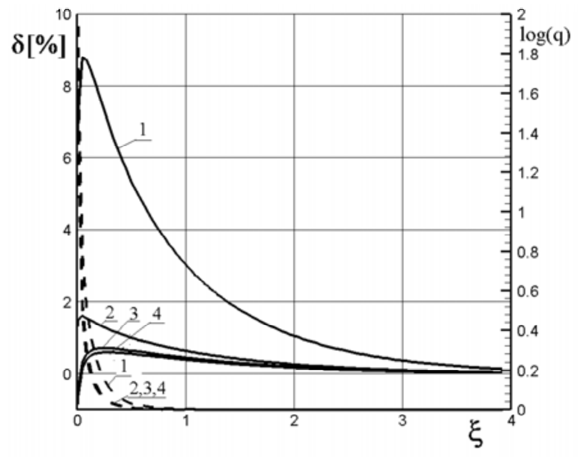

Рис. 3. Изменение $\delta(\xi)$ для $R_m = 20\mu m$ $(r_m/R_m = 0.2)$. $1 - \alpha = 0^0$; $2 - \alpha = 15^0; 3 - \alpha = 45^0$; $4 - \alpha = 60^0$

Далее, теплоотвод в термопару приводит и к значительному возрастанию оттока тепла от поверхности пиролиза при ее приближении к термопаре, что может привести к значительному изменению скорости пиролиза вблизи места расположения головки термопары

Список литературы

[1] Borovkova T.V., Yeliseyev Y.N., Lopukhov I.I. Mathematical modeling of contact thermocouple // Physics of Particles and Nuclei Letters. 2008. vol. 5, No.3. P. 274 – 277.

[2] Franco G.A., Caron E., Wells M.A. Quantification of the surface temperature discrepancy caused by surface thermocouples and methods for compensation. // Metallurgical and naterils transactions B. 2007. vol. 338B. P. 949 – 956.

[3] Зенин А.А. Об ошибках термопарных измерений пламен // Инженерно – физический журнал. 1962. т. 5. № 5. С. 67 – 74.

[4] Зенин А.А. О теплообмене термопар в волне горения твердого топлива // ПМТФ. 1963. № 5. С. 125 – 131.

[5] Asay B.W., Son S.F., Dickson P.M., Smilowitz L.B., Henson B.F. An Investigation of the Dynamic Response of Thermocouples in Inert and Reacted Condensed Phase Energetic Materials // Propellants, Explosives, Pyrotechnics. 2005. v. 30. No 3. P. 199 – 208.

[6] Vinokur M. An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation laws // J. Comput. Physics. 1989. v. 81. P. 1 – 52.

[7] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 195С.

[8] Liseikin V.D. A computational differential geometry approach to grid generation. Berlin: Springer, 2007 (second edition).