

# Некоторые особенности численного моделирования гидроразрыва пласта

С.Г. ЧЕРНЫЙ, В.Н. ЛАПИН, Д.В. ЕСИПОВ, Д.С. КУРАНАКОВ  
*ИВТ СО РАН, Новосибирск*  
e-mail: matmod@ict.nsc.ru

В работе рассмотрены две модели процесса гидроразрыва пласта, описывающие наиболее характерные сценарии развития: распространение продольной и поперечной к скважине трещин. Моделируются процессы деформации породы, ее разрушения, связанного с распространением трещины, движения жидкости внутри трещины и утечки ее в породу. Показано влияние параметров гидроразрыва на эволюцию трещины.

## 1. Введение

Для повышения нефтеотдачи породы применяется технология формирования в ней трещины гидроразрыва. Технология заключается в подаче жидкости в скважину под высоким давлением, которая вызывает образование и распространение трещины в породе (Рис. 1). После создания, трещина заполняется мелкими частицами – проппантом – для того чтобы предотвратить ее закрытие и локально повысить проницаемость пласта.

Поскольку непосредственная информация о развитии трещины и ее параметрах труднодоступна, при проведении гидроразрыва необходимо опираться на результаты моделирования. В работе представлены две модели трещины, описывающие наиболее характерное их поведение и расположение. Первая модель описывает поведение поперечной трещины, характерной при проведении гидроразрыва горизонтальных скважин. Вторая – поведение продольной трещины, которая обычно образуется при проведении гидроразрыва скважин вертикальных. Несмотря на то, что модели предназначены для трещин различной конфигурации, они описывают одни и те же процессы, но в различных приближениях.

## 2. Модель поперечной трещины

Поперечные трещины (Рис. 1) образуются преимущественно при гидроразрыве вертикальных скважин на малой глубине, когда вертикальные напряжения уступают горизонтальным, или при гидроразрыве горизонтальных скважин, пробуренных в направлении действия минимальных напряжений.

### 2.1. Деформация породы

Предполагается, что трещина распространяется с одинаковой скоростью во все стороны и все процессы – осесимметричны. Порода считается хрупким упругим изотропным однородным телом, а ее деформация – стационарной. Для расчета ширины трещины используется аналитическое решение [1].

$$W(r) = 4 \frac{1 - \nu}{\pi \mu} \int_0^{R_{frac}} \int_0^{R_{frac}} \frac{p(\rho) \rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2} \sqrt{x^2 - r^2}} d\rho dx. \quad (1)$$

Здесь  $W(r)$  - ширина трещины  $p(r)$  - избыточное давление жидкости  $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$  - коэффициент Пуассона породы,  $\lambda$ ,  $\mu$  - коэффициенты Ламе,  $R_{frac}$  - радиус трещины.

## 2.2. Разрушение породы и распространение трещины

В качестве критерия распространения используется следующая формулировка: “трещина распространяется, при условии достижения коэффициентом интенсивности напряжений критического значения для породы” [2]

$$K_I = K_{Ic}. \quad (2)$$

Критическое значение коэффициента интенсивности для породы  $K_{Ic}$  считается заданным параметром. Сам коэффициент интенсивности напряжений для круговой трещины рассчитывается по формуле [3]

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi R_{frac}}} \int_0^{R_{frac}} \frac{p(\rho) \rho}{\sqrt{R_{frac}^2 - \rho^2}} d\rho. \quad (3)$$

## 2.3. Движение жидкости

Жидкость гидроразрыва считается неньютоновской, и описывается в приближении Гершеля-Балкли (Herschel-Bulkley) [4]. Ее осесимметричное движение в трещине описывается уравнением для давления [5]

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -2K \left( \frac{2n+1}{\pi n} \right)^n \frac{Q^n}{W^{2n+1} r^n} + \left( \frac{4n+2}{n+1} \right) \frac{\tau_0}{W}, \quad 0 \leq r \leq R_{front}, \quad (4)$$

полученным из решения задачи о радиальном течении жидкости между двумя параллельными пластинами, и уравнением неразрывности

$$\frac{\partial(rW)}{\partial t} + \frac{\partial(rWu)}{\partial r} + \frac{1}{2\pi} Q_L(r, t) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_{front}. \quad (5)$$

Здесь  $K$  - коэффициент вязкости,  $n$  - показатель степени,  $R_{front}(t)$  - положение фронта жидкости,  $Q_L(r, t)$  - объем жидкости теряющейся в породу на окружности радиуса  $r$  в момент времени  $t$ .

Уравнения (4), (5) дополняются граничными условиями на кончике трещины и на скважине

$$p|_{r=R_{front}} = p_{pore}, \quad Q|_{r=R_w} = Q_{in} \quad (6)$$

где  $p_{pore}$  - поровое давление в породе,  $Q_{in}$  - скорость закачки жидкости в скважину.

Также в эту подмодель включается условие для скорости фронта жидкости

$$\frac{\partial R_{front}}{\partial t} = \frac{Q(R_{front})}{2\pi R_{front} \cdot W(R_{front})}. \quad (7)$$

## 2.4. Фильтрация жидкости в породе

Утечка жидкости в породе описывается законом Картера [6, 7] согласно которому скорость жидкости через стенку трещины определяется по формуле

$$u_L(r, \varphi, t) = \frac{C_L}{\sqrt{t - t_{\text{exp}}(r)}}, \quad (8)$$

где  $C_L$  эмпирический коэффициент утечек,  $t$  - текущее время, а  $t_{\text{exp}}$  - время достижения кончиком трещины точки на расстоянии  $r$  от скважины. Объем, утекающий через берега трещины на окружности радиуса  $r$ , есть

$$Q_L(r, t) = 2 \int_0^{2\pi} u_L(r, \varphi, t) r d\varphi = \frac{4\pi r C_L}{\sqrt{t - t_{\text{exp}}(l)}}. \quad (9)$$

## 2.5. Метод совместного решения уравнений модели

На каждом временном шаге  $n + 1$  задается приращение длины трещины  $\Delta R_{\text{frac}} = R_{\text{frac}}^{n+1} - R_{\text{frac}}^n$ . Для заданной длины трещины  $R_{\text{frac}}^{n+1}$  проводится установление положения фронта  $R_{\text{front}}^{n+1}$ . Положение фронта подбирается таким образом, чтобы выполнялось граничное условие для давления на фронте (6). При невыполнении этого условия положение фронта корректируется.

Для проверки условия (6) требуется знать распределение давления внутри трещины. Оно находится для заданного положения фронта  $R_{\text{front}}^{n+1}$  итерационно. Для известных длины трещины  $R_{\text{frac}}^{n+1}$  и положения фронта  $R_{\text{front}}^{n+1}$  совместно численно решаются уравнения течения жидкости и упругости. Для этого система уравнений (1)-(7), (9) формулируется в виде системы для одного распределения – давления

$$p_i = P_i(\mathbf{p}) = P_i(\mathbf{W}(p_1, \dots, p_N), \mathbf{Q}(\mathbf{W}(p_1, \dots, p_N))), \quad (10)$$

где  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{Q}$  - вектора значений давления, ширины и расхода на расчетной сетке,  $p_i$  - значения давления в  $i$  узле. Для решения системы используется метод релаксации

$$\mathbf{p}^{k+1} = (1 - r)\mathbf{p}^k + r P(\mathbf{p}^k). \quad (11)$$

## 3. Модель продольной трещины.

Продольные трещины образуются преимущественно при гидроразрыве вертикальных скважин на большой глубине, когда вертикальные напряжения превосходят горизонтальные. Схематично плоская продольная трещина показана на Рис. 2.

### 3.1. Деформация породы

Траектория поперечной трещины может быть криволинейной, если инициация произошла в направлении, отличном от магистрального – направления действия максимальных напряжений в породе. В отличие от модели поперечной трещины, не существует аналитического решения, связывающего распределения давления и ширины трещины произвольной формы. Поэтому ширину трещины необходимо определять по смещениям ее берегов, рассчитанным на основе плоского деформированного состояния породы

$$W(l) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^+ + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^-. \quad (12)$$

где  $l$  - расстояние вдоль трещины от скважины,  $\mathbf{u}^\pm = (u_1, u_2)$  - вектор смещений на верхнем и нижнем берегах трещины,  $\mathbf{n}$  - нормаль к серединной линии трещины.

Для расчета плоского деформированного состояния породы используется метод граничных элементов [8, 9], в котором система уравнений упругости заменяется интегральным соотношением на границе области (трещине).

$$u_i(x') = \int_S U_{ij}(x', x) t_j(x) dS(x) - \int_S T_{ij}(x', x) u_j(x) dS(x), \quad (13)$$

где  $U_{ij}, T_{ij}$  - известные ядра,  $t_j$  - компоненты вектора усилий  $\mathbf{t} = -p\mathbf{n} + \sigma^\infty \mathbf{n}$ ,  $\sigma^\infty = \text{diag}(\sigma_1^\infty, \sigma_2^\infty)$  - тензор напряжений в породе в естественном залегании,  $x'$  - произвольная точка границы области. Далее компоненты смещений и усилий представляются в виде комбинации базисных функций. Коэффициенты разложения находятся из системы линейных уравнений, которая получается при подстановке этих функций в уравнение (13).

### 3.2. Разрушение породы и распространение трещины

Так же как и в случае поперечной радиальной трещины, условием роста криволинейной трещины является достижение коэффициентом интенсивности напряжений  $K_I$  его критического значения  $K_{Ic}$ . Для расчета траектории используется условие равенства нулю второго (сдвигового) коэффициента интенсивности напряжений

$$K_I = K_{Ic}, \quad K_{II} = 0. \quad (14)$$

Значения коэффициентов интенсивности рассчитываются также методом граничных элементов.

### 3.3. Движение жидкости

Подмодель течения жидкости включает в себя уравнение для давления

$$\frac{\partial p}{\partial l} = -\frac{2K}{W} \left( \frac{4n+2}{nW^2} Q \right)^n, \quad 0 \leq l \leq L_{frac}, \quad (15)$$

полученное из решения одномерной задачи о течении жидкости между двумя параллельными пластинами (течение Пуазейля), и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial l} + Q_L(l, t) = 0, \quad 0 \leq l \leq L_{frac}. \quad (16)$$

Здесь  $p(l, t)$ ,  $W(l, t)$ ,  $Q(l, t)$  - давление жидкости, ширина трещины и поток жидкости через сечение трещины на расстоянии  $l$  от скважины,  $R_{frac}(t)$  - длина трещины в момент времени  $t$ . В настоящей модели считается, что жидкость заполняет трещину вплоть до кончика. Отставание жидкости, явно описываемое в модели радиальной трещины, как показали расчеты, оказывает пренебрежимо малое влияние на основные параметры гидроразрыва. Поэтому им пренебрегается, что позволяет уменьшить количество переменных. Замыкание уравнений осуществляется с помощью граничного условия для скорости закачки

$$Q(0, t) = Q_{in}(t) \quad (17)$$

и уравнения баланса

$$\int_0^{L_{frac}(t)} W(l, t) dl = Q_{in} t - \int_0^t \int_0^{L_{frac}(\tau)} Q_L(l, \tau) dl d\tau. \quad (18)$$

### 3.4. Фильтрация жидкости в породе

Аналогично модели поперечной трещины для расчета утечки жидкости в породе используется закон Картера (8), который для плоской трещины дает следующую формулу утечек

$$Q_L(l, t) = \frac{2C_L}{\sqrt{t - t_{exp}(l)}}. \quad (19)$$

### 3.5. Метод совместного решения уравнений модели

На каждом временном шаге необходимо найти новое положение кончика трещины удовлетворяющего критериям (14). Эта задача интерпретируется как система нелинейных уравнений и решается методом Ньютона.

Для расчета каждого из коэффициентов напряжений при заданном положении кончика трещины необходимо определить распределение давления вдоль трещины. Для этого задача (12), (15)-(19) формулируется в виде системы нелинейных уравнений вида (10). В отличие от модели радиальной трещины, метод релаксации для этой задачи, как оказалось, обладает низкой скоростью сходимости, поэтому вместо него был выбран метод Левенберга-Марквардта. В нем система (10) переписывается как задача на нахождение минимального значения функционала

$$F(p_1, \dots, p_N) = \sum_{i=1}^N f_i^2(p_1, \dots, p_N) \rightarrow \min, \quad f_i(p_1, \dots, p_N) = p_i - P_i(p_1, \dots, p_N). \quad (20)$$

Сам метод является комбинацией метода Ньютона, на тех итерациях, где он уменьшает значение функционала, и метода градиентного спуска, если метод Ньютона увеличивает его значение.

## 4. Результаты расчетов: эволюция поперечной трещины

Разработанная модель поперечной радиальной трещины использовалась для описания ее эволюции трещины и определения влияния различных параметров гидроразрыва. Так на Рис. 3 показаны зависимости длины и ширины трещины от времени при различных значениях расхода в скважину. Стоит отметить, тот факт, что интенсивность закачки жидкости не влияет на давление в скважине. Повышение скорости закачки требует больших мощностей насосов, однако позволяет сократить время процесса и количество утекающей в породе жидкости гидроразрыва.

## 5. Результаты расчетов: эволюция продольной трещины

Модель поперечной трещины позволяет описать процесс выхода трещины на магистральное направление. Было рассмотрено распространение трещины из перфораций, находящихся под углами 30, 60 и 90 к нему (Рис. 4). Видно, что траектория трещины выходит на становится прямолинейной на расстоянии не более 10 диаметров скважины.

На Рис. 4 показаны зависимости ширины трещины и давления от времени для каждого из углов. Меньшая ширина при больших углах перфорирования обусловлена пережатием трещины в окрестности скважины на участке искривленной траектории. Такое пережатие препятствует проникновению пропанта в трещину и может вызвать остановку всего процесса.

## Список литературы

- [1] Слепян Л.И. Механика трещин. – Л. Судостроение, – 1990. – 296С.
- [2] Irwin G.R. Analysis of stress and strain near the end of crack traversing a plate // J. Appl. Mech 1957. V24 N.3 P.361-364.
- [3] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения, М. Наука, 1974, 640 С.
- [4] Tang, Hansong S.; Kalyon, Dilhan M. (2004), "Estimation of the parameters of Herschel–Bulkley fluid under wall slip using a combination of capillary and squeeze flow viscometers *Rheologica Acta* **43** (1): 80–88, [doi:10.1007/s00397-003-0322-y](https://doi.org/10.1007/s00397-003-0322-y)
- [5] R. Majidi, S.Z. Miska, M.Yu, L.G. Thompson *Modeling of drilling fluid losses in naturally fractured formations* // SPE114630
- [6] Carter R.D. Derivation of the general equation for estimating of extent of the fracturing area // Appendix I of Optimum fluid Characteristics for fracture extension, Drilling and production practice, G.C. Howard and C.R. Fast, New-York, USA, American petroleum institute, 1957, 261-269.
- [7] Reservoir stimulation (third edition) // Editors: Michael J. Economides (University of Houston, USA), Kehneth G. Nolte (Schlumberger Technology Corporation, USA), John Wiley & Sons, LTD, 2000.
- [8] Brebbia C.A. The Boundary Element Method for Engineers. – Pentech Press: London, 1978.
- [9] Becker A.A. The Boundary Element Method in Engineering. A complete course, 1992, 337 p.

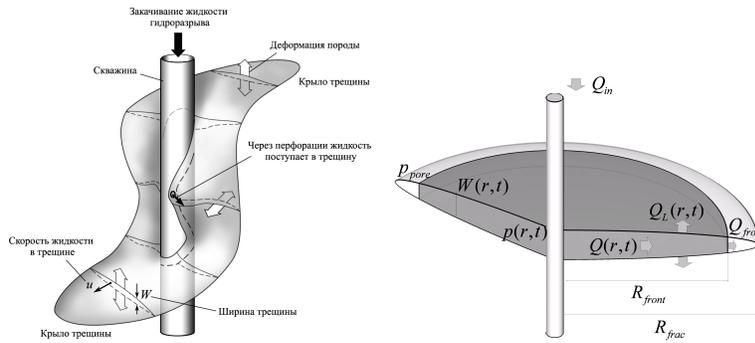


Рис. 1. Процесс гидроразрыва пласта (слева) и схема поперечной радиальной трещины (справа).

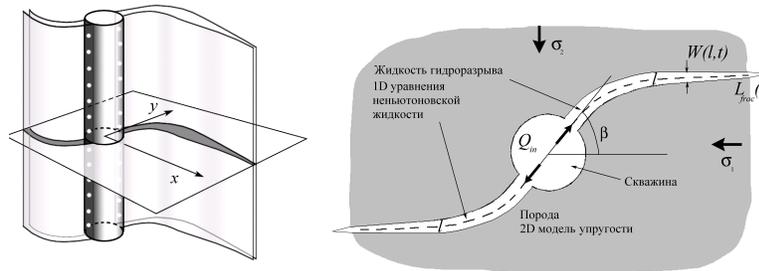


Рис. 2. Схема плоской продольной трещины.

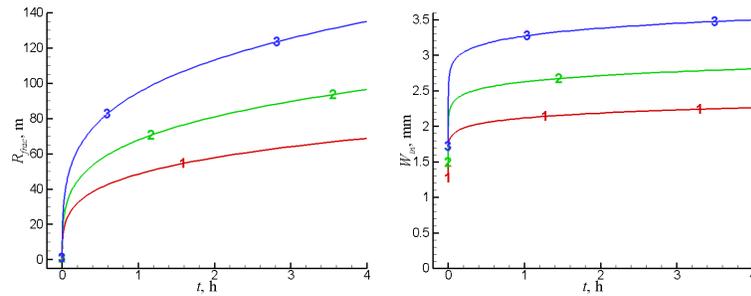


Рис. 3. Зависимости длины и ширины трещины от времени при различных значениях расхода в скважину: 1 – 20 барр/час, 2 – 40 барр/час, 3 – 80 барр/час.

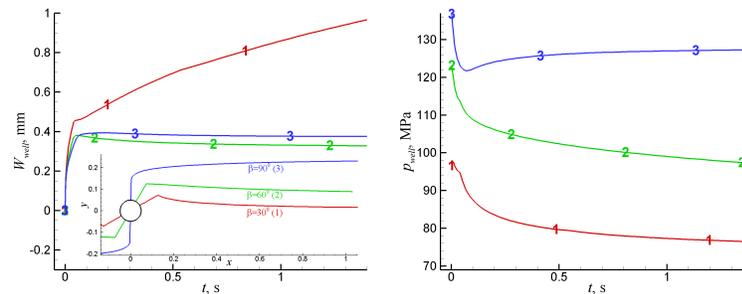


Рис. 4. Зависимости давления и ширины трещины от времени при различных углах перфорирования: 1 –  $\beta = 30^\circ$  2 –  $\beta = 60^\circ$  3 –  $\beta = 90^\circ$