

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ЗЕМНОЙ КОРЕ МЕТОДОМ "ЧАСТИЦ-В-ЯЧЕЙКАХ"*

Ю.Н. ГРИГОРЬЕВ, А.Г. ГОРОБЧУК, М.П. ФЕДУРУК

Институт вычислительных технологий СО РАН

e-mail: al@ict.nsc.ru

На основе численного моделирования решается задача о тепловой конвекции в земной коре методом "частиц-в-ячейках". Показано, что при больших числах Рэлея и градиентах вязкости возникает восходящий конвективный поток, формирующий тепловую волну к поверхности Земли, характерную для эффекта диапиризма.

Введение

Моделирование конвективной неустойчивости в земной коре является одной из важнейших задач геофизики, которой посвящено значительное количество работ. Рассматривается двумерная математическая модель тепловой конвекции, в которой движение среды описывается уравнениями Стокса. Ввиду малости изменений плотности от температуры в уравнениях Стокса используется приближение Буссинеска. Распределение температуры находится из уравнения переноса тепла. Основную трудность при переходе от дифференциальных уравнений к их дискретной алгебраической аппроксимации представляет выбор численной модели, который оказывает существенное влияние на свойства численного алгоритма и архитектуру программы. При решении данных уравнений получили распространение как конечно-разностные методы, так и методы конечных элементов. Последние эффективны при численном решении в областях сложной формой. Однако при больших градиентах и значениях вязкости, а также больших числах Рэлея эти методы теряют устойчивость и требуют применения специальных формулировок исходных дифференциальных уравнений. Кроме того, эти методы характеризуются высокой трудоемкостью и большим объемом вычислений. Альтернативой здесь представляются методы "частиц-в-ячейках" [1], которые обладают очевидными преимуществами по сравнению с традиционными численными схемами. Несмотря на невысокую вычислительную точность, методы "частиц-в-ячейках" адекватно воспроизводят многие тонкие эффекты исходных математических моделей, которые оказываются недоступными для других численных схем. На двумерных и трехмерных нестационарных задачах эти методы обладают большим запасом устойчивости при больших градиентах вязкости и числах Рэлея, допускают быстрое продвижение по эволюционной переменной и легко адаптируются к компьютерам с параллельной архитектурой.

*Работа выполнена при финансовой поддержке междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН №2, Российского фонда фундаментальных исследований (проект №11-01-00064-а), президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект №НШ-6068.2010.9).

В настоящей работе рассматривается задача о тепловой конвекции в земной коре на основе метода "частиц-в-ячейках". Предложенный численный алгоритм позволяет проводить расчеты конвективных течений при числах Рэлея до 10^7 , больших градиентах вязкости и теплопроводности.

Математическая модель тепловой конвекции

Схематическое изображение эффекта диапиризма и основные геометрические размеры расчетной области представлены на рис. 1.

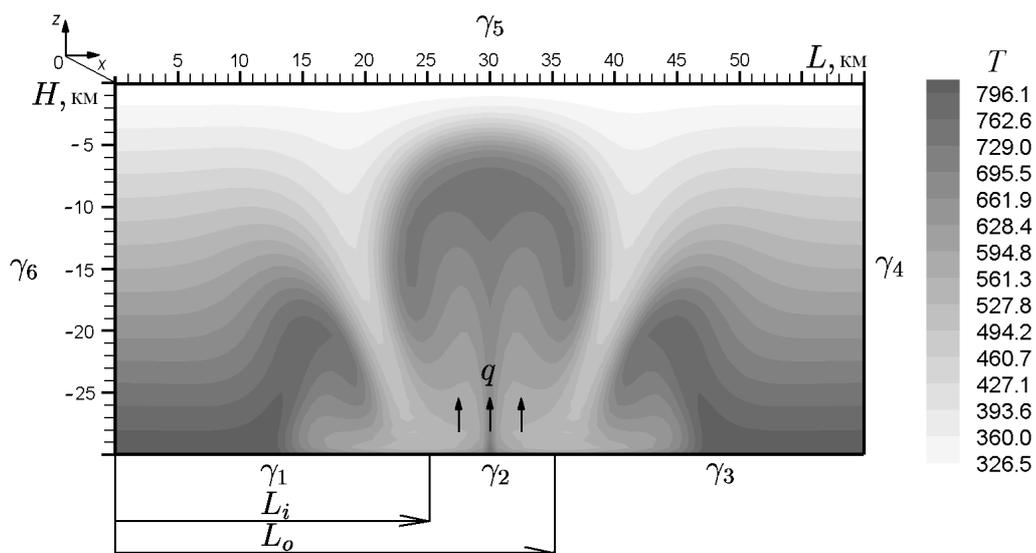


Рис. 1. Схематическое представление эффекта диапиризма: характерные геометрические размеры и границы расчетной области.

Математическая модель тепловой конвекции включает решение следующих уравнений: – уравнения Стокса, описывающие движения породы:

$$A \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1)$$

$$A \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = A \frac{\partial P}{\partial z} - \text{Ra} \vartheta, \quad (2)$$

где компоненты тензора напряжений выражаются через компоненты тензора скоростей деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\eta \varepsilon_{xx} = 2\eta A \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ \sigma_{xz} &= 2\eta \varepsilon_{xz} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + A \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \sigma_{zz} &= 2\eta \varepsilon_{zz} = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}; \end{aligned}$$

– уравнение непрерывности:

$$A \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \quad (3)$$

– уравнение переноса тепла:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v \cdot \nabla \vartheta \right) = A \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + Q, \quad (4)$$

где компоненты теплового потока:

$$q_x = \lambda A \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad q_z = \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z}.$$

Здесь x, z – оси координат; σ_{ij} – тензор напряжений; ε_{ij} – тензор скоростей деформации; v_x, v_z – компоненты вектора скорости; η – коэффициент динамической вязкости; p – давление; ρ – плотность; c_p – теплоемкость при постоянном давлении; λ – коэффициент теплопроводности; ϑ – температура; Q – источники тепла. Координаты масштабированы на ширину L и глубину H области соответственно. Используемый в уравнениях, масштабный коэффициент равен отношению $A = H/L$. Скоростные переменные обезразмерены на характерную скорость χ/H , где χ – коэффициент температуропроводности. Остальные величины нормировались следующим образом: давление – на $H^2/\eta_0\chi$; коэффициент динамической вязкости – на η_0 ; время – на H^2/χ ; плотность – на ρ_0 ; теплоемкость при постоянном давлении – на c_{p0} ; коэффициент теплопроводности – на λ_0 ; температура – на максимальное значение T_1 ; источники тепла – на $H^2/\lambda_0 T_0$. Значения $\rho_0, \eta_0, c_{p0}, \lambda_0$ вычислялись при минимальной температуре T_0 . Число Рэлея, характеризующее взаимодействие подъемных сил и сил вязкости, вычислялось как:

$$\text{Ra} = \frac{\rho_0 g \alpha \Theta H^3}{\eta_0 \chi},$$

где $\Theta = T_1 - T_0$ – характерная разность температур, g – ускорение свободного падения, α – температурный коэффициент объемного расширения. Использовалось линейное уравнение состояния: $\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) + \beta(p - p_0)]$, где p, p_0 – давление на глубине и на поверхности соответственно, β – коэффициент изотермической сжимаемости. Давление, соответствующее механическому равновесию при постоянных температуре T и плотности ρ , меняется с глубиной по гидростатическому закону: $p = p_0 - \rho g z$.

На границах расчетной области для вектора скорости и температуры ставились следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} \gamma_1, \gamma_3 : \quad & \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad v_z = 0, \quad -A \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \text{Nu}(1 - \vartheta), \quad 0 \leq x < \frac{L_i}{L} \cup \frac{L_o}{L} < x \leq 1, z = -H; \\ \gamma_2 : \quad & \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad v_z = 0, \quad -A \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{qH}{\lambda T_1} + \text{Nu}(1 - \vartheta), \quad \frac{L_i}{L} \leq x \leq \frac{L_o}{L}, z = -H; \\ \gamma_4, \gamma_6 : \quad & v_x = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \quad x = 0 \cup x = L, -H < z < 0; \\ \gamma_5 : \quad & v_x = 0, \quad v_z = 0, \quad \vartheta = \frac{T_1}{T_0}, \quad 0 \leq x \leq L, z = 0; \end{aligned}$$

где q – тепловой поток на нижней грани земной коры. Краевое условие на температуру на границе γ_2 при $L_i/L \leq x \leq L_o/L$ записывалось в виде баланса тепловых потоков, в котором рассматривалась теплоотдача горизонтальной плиты при естественной конвекции. Для числа Нуссельта, характеризующее интенсивность теплообмена, использовалась зависимость следующего вида: $\text{Nu} = 0.54 \cdot \text{Ra}^{1/4}$.

обозначают горизонтальную и вертикальную узловые точки, соответствующие различным физическим параметрам в смещенной сетке. Для построения конечно-разностных аналогов уравнений (1), (2) в консервативной форме использовался метод контрольного объема первого порядка точности [4], сохраняющий вязкие напряжения между v_x - и v_z -узловыми точками. Для дискретизации производных от компонент тензора напряжений использовались конечные разности первого порядка точности. При этом компоненты тензора напряжений вычислялись в узлах, расположенных между парой v_x - и v_z -узловых точек. Для численной дискретизации компонент тензора скоростей деформаций использовались конечные разности первого порядка точности, наиболее подходящие для решения задач с резко изменяющимся значением вязкости. Полученные в результате аппроксимации уравнений (1), (2) их конечно-разностные аналоги записывались на смещенных сетках в виде систем линейных алгебраических уравнений с пятидиагональными матрицами, которые решались методом Гаусса. Решение уравнений (1)-(3) на смещенной сетке проводилось с применением алгоритма типа SIMPLE [5]. Из уравнений (1), (2) находились компоненты вектора скорости $v_{x_{i,j+1/2}}$ и $v_{z_{i+1/2,j}}$, соответственно, а из уравнения (3) – давление $p_{i-1/2,j-1/2}$.

После динамических уравнений решается уравнение переноса тепла без конвективных членов. Для уравнения (4) использовалась неявная консервативная конечно-разностная схема [4], где исходное уравнение записывалось в виде производных от тепловых потоков. Эти производные аппроксимировались конечными разностями первого порядка точности. Компоненты теплового потока q_x, q_z рассчитывались в смещенных узлах разностной сетки, расположенных между узлами основной сетки. Источники тепла брались с предыдущего временного слоя. Для численной аппроксимации температурных градиентов использовались конечные разности первого порядка точности, наиболее подходящие для решения задач с резко изменяющимся коэффициентом теплопроводности. В результате в основной сетке получена система линейных алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей, которая решалась методом Гаусса.

Лагранжев этап. Температура (количество тепла) переносится лагранжевыми частицами. Их первоначальное распределение выбирается в соответствии с предполагаемым профилем температуры. Перед началом лагранжева этапа выполнялась интерполяция температурных изменений, найденных в узлах эйлеровой сетки, в местоположение частиц, для которых определялись новые значения температур. Перемещение частиц в соответствии с ранее рассчитанным полем течения вычислялось на основе явной схемы первого порядка точности. По окончании лагранжева этапа значение температуры интерполируется с частиц в узлы эйлеровой сетки. Для интерполяции применялась схема РС. Для определения местоположения частицы в соответствующей ячейке сетки использовался двумерный бисекционный метод.

Предложенный алгоритм позволяет проводить расчеты конвективных течений при высоких числах Рэлея (до 10^7), больших градиентах вязкости и теплопроводности. Численный алгоритм полностью консервативен по напряжениям и тепловым потокам с учетом существенных изменений вязкости, теплопроводности и высоких градиентов температуры.

Результаты и их обсуждение

Рассматривалось влияние числа Рэлея и начальных условий на эволюцию конвективного движения в земной коре. Структура течения имеет вид восходящего струйного потока,

в граничных сдвиговых слоях которого образуются интенсивные вихри, закрученные в направлении потока. С удалением от центра потока расположены вихри меньшей интенсивности, которые с увеличением числа Рэлея вытесняют основные вихри вверх и способствуют формированию системы более мелких вихрей. Распределение температуры имеет вид, характерный для эффекта диапиризма, при котором горячий температурный фронт проникает в более холодные слои земной коры. Интенсивность проникновения и форма диапира определяются числом Рэлея, и в меньшей степени отношением вязкостей η_1/η_0 . Плотность понижается на фронте тепловой волны и повторяет форму диапира.

Решение задачи о конвективной неустойчивости в земной коре показало, что при больших числах Рэлея и градиентах вязкости возникает восходящий конвективный поток, формирующий тепловую волну к поверхности Земли, характерную для эффекта диапиризма. Для детального решения данной задачи, в частности, в двух компонентной постановке "гранит – расплавленный базальт" представляется перспективным использование метода "частиц-в-ячейках" на многопроцессорных вычислительных системах.

Список литературы

- [1] ГРИГОРЬЕВ Ю.Н., ВШИВКОВ В.А., ФЕДОРУК М.П. Численное моделирование методами "частиц-в-ячейках". Новосибирск: Из-во СО РАН, 2004.
- [2] BITTNER D., SCHMELING H. Numerical modeling of melting processes and induced diapirism in the lower crust // *Geophys. J. Int.* 1995. Vol. 123. P. 59–70.
- [3] GERYA T.V., YUEN D.A. Robust characteristics method for modelling multiphase visco-elasto-plastic thermo-mechanical problems // *Physics of the Earth and Planetary Interiors.* 2007. Vol. 163. P. 83–105.
- [4] GERYA T.V., YUEN D.A. Characteristics-based marker-in-cell method with conservative finite-differences schemes for modeling geological flows // *Physics of the Earth and Planetary Interiors.* 2003. Vol. 140. P. 293–318.
- [5] ПАТАНКАР С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. Пер. с англ. под ред. В.Д. Виленского. М.: Энергоатомиздат, 1984.