

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАБОТЫ ИМПУЛЬСНОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПОЖАРОТУШЕНИЯ

А.Д. Рычков, Ю.И. Шокин

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090, Новосибирск,
Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск,

Введение

В настоящее время для эффективной борьбы с интенсивными очагами возгорания широкое применение находят системы порошкового пожаротушения на основе различного рода пламегасителей, в качестве которых используются фосфорорганические, металлоорганические, а также некоторые галогенсодержащие соединения. Попадая в зону пламени, эти пламегасящие вещества (ПГВ) разлагаются с образованием активных соединений, которые вступают в химические реакции с радикалами (частицами, ответственными за горение и распространение пламени) переводя их в неактивные частицы. Эффективность тушения очагов горения при таком способе определяется, главным образом, показателем концентрации порошка пламегасителя в зоне горения [1], а также суммарной площадью поверхности частиц ПГВ. Ранее авторами была предложена концептуальная схема импульсной аэрозольной системы пожаротушения (ИАСП) [2 – 4], представляющую собой устройство раздельного снаряжения, в котором распыление пламегасящего вещества и транспортировка его в зону горения в виде облака мелкодисперсных аэрозолей осуществляется продуктами сгорания обычного твердотопливного газогенератора кратковременного (импульсного) действия, не содержащих окислитель. Различные конструктивные схемы ИАСП могут быть использованы для тушения горящих факелов на газовых скважинах и на нефтехранилищах. В этом случае целесообразно использовать систему из нескольких таких устройств, расположенных вокруг факела или по периферии бака (рис. 1, 2), каждое из которых представляет собой полузамкнутый сосуд, содержащий заряд твердого топлива в виде гранул и мелкодисперсный порошок пламегасителя.

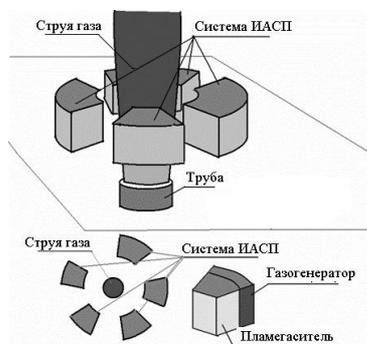


Рис. 1. Схема тушения газового факела.

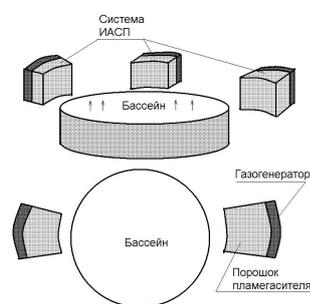


Рис.2. Схема тушения разлива нефти.

При воспламенении твердотопливного заряда газогенератора под воздействием продуктов его сгорания происходит компактирование и движение частиц пламегасителя. После их выхода из сосуда продукты сгорания формируют баллистическую волну низкой интенсивности, которая сбивает пламя, а также распыляют и диспергируют пламегаситель, который в виде аэрозольного облака наноразмерных частиц доставляется в зону горения. При испарении частиц пламегасителя из-за поглощения ими тепла происходит понижение температуры среды в зоне облака частиц и, кроме того, происходит вытеснение кислорода воздуха от очага горения, поскольку продукты сгорания газогенератора его не содержат. Сочетание всех этих факторов (действие баллистической волны, охлаждение газа в зоне облака частиц, вытеснение из этой зоны кислорода воздуха, наличие паров пламегасителя), а также подбор нужного соотношения массы заряда газогенератора и пламегасителя, позволяет тушить различные типы пожаров большой интенсивности.

Описание модели и основные уравнения

При работе твердотопливного газогенератора его газообразные продукты сгорания создают давление в несколько десятков атмосфер и их истечение в окружающую среду происходит в турбулентном режиме. Поэтому в качестве модели движения несущего газа использовалась осредненная по Фавру система уравнений Навье-Стокса, замыкаемая $q - \omega$ моделью турбулентности [5]. Описание движения полидисперсной твердой фазы проводилось в рамках стохастического подхода [6], учитывающего влияние турбулентной природы поля течения несущего газа на движение частиц.

Основной целью данной работы являлось изучение газодинамической структуры поля течения при воздействии ИАСП на очаг возгорания и определение полей концентраций частиц ПГВ. Поэтому при построении математической модели принимались следующие допущения:

- совокупность ИАСП (рис. 1), воздействующих на газовый факел, заменялась тором прямоугольного сечения, что позволяет заменить пространственное течение осесимметричным без существенного искажения сути протекающих процессов;
- природный газ в струе и пары испаряющегося жидкого топлива моделировались газообразным метаном, который смешивался с воздухом и сгорал в диффузионном режиме. Горение метана описывалось одностадийной брутто-реакцией



- несущий газ представлял собой химически реагирующую многокомпонентную смесь, состоящую из метана, углекислого газа, паров воды, воздуха, химически инертных продуктов сгорания газогенератора, не содержащих окислитель, и продуктов разложения твердых частиц ПГВ;
- течение является турбулентным, двухфазным, осесимметричным и нестационарным;
- частицы ПГВ полагаются полидисперсными, имеют сферическую форму и состоят из N фракций, внутри каждой из которых частицы имеют одинаковый размер. Столкновения между частицами не учитывались;
- распределение температуры по объему частицы считается однородным. При достижении ей заданной величины $T_{\text{исп}}$ происходит разложение ПГВ с образованием паров, причем линейная скорость такого разложения r_p предполагалась постоянной;
- газоприход от гранул твердого топлива и от частиц ПГВ при их разложении моделировался источниковыми членами в уравнениях сохранения массы и энергии.

Скорость брутто-реакции горения метана определялась выражением, типичным для бимолекулярных реакций

$$W = \rho^2 Y_{\text{O}_2} Y_{\text{CH}_4} K_0 \exp(-E/(R \cdot T)), \quad (2)$$

где ρ, T – плотность газовой смеси и ее температура; $Y_{\text{O}_2}, Y_{\text{CH}_4}$ – массовые концентрации кислорода и метана соответственно; K_0, E, R – предэкспоненциальный множитель в законе Аррениуса, энергия активации и газовая постоянная. Влияние паров ПГВ на процесс горения учитывалось через уменьшение значения предэкспоненциального множителя K_0 в (2) путем замены его на множитель K_0^* , вычисляемый по формуле, предложенной О.П. Коробейниковым с сотрудниками (частное сообщение)

$$K_0^* = \begin{cases} K_0 (1 - 7.071 \cdot Y_{\text{ПГВ}}^{1/2})^2, & Y_{\text{ПГВ}} \leq 0.02; \\ 0, & Y_{\text{ПГВ}} > 0.02, \end{cases} \quad (3)$$

где $Y_{\text{ПГВ}}$ – массовая концентрация паров ПГВ.

Система уравнений, описывающая такое нестационарное двухфазное течение в цилиндрической системе координат, имеет следующий вид.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v) = M_{\text{ген}} - \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{dm_i}{dt} \right\rangle > n_i; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{Y}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \bar{Y} + \bar{q}_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\rho v \bar{Y} + \bar{q}_r) = \bar{S}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p + \tau_{xx}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\rho u v + \tau_{xr}) = - \sum_{i=1}^N n_i \langle m_i \frac{du_i}{dt} \rangle; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v u + \tau_{rx}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\rho v^2 + p + \tau_{rr}) = p - \sum_{i=1}^N n_i \langle m_i \frac{dv_i}{dt} \rangle; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u H + u \tau_{xx} + v \tau_{xr} + \phi_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\rho v H + u \tau_{xr} + v \tau_{rr} + \phi_r) = \\ = - \sum_{i=1}^N n_i [u \langle m_i \frac{du_i}{dt} \rangle + v \langle m_i \frac{dv_i}{dt} \rangle + \langle \pi d_i \lambda \cdot Nu (T - T_i) \rangle - \\ - \langle \frac{dm_i}{dt} C_i (T - T_i) \rangle] + Q_{gen} M_{gen} + W Q_p; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u q + \tau_{x,q}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\rho v q + \tau_{r,q}) = S_q; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \omega + \tau_{x,\omega}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\rho v \omega + \tau_{r,\omega}) = S_\omega; \quad (10)$$

$$p = \rho T R_0 \sum_{i=1}^7 \frac{Y_i}{M_i}; \quad \sum_{i=1}^7 Y_i = 1, \quad (11)$$

$$\bar{Y} = \{Y_{CH_4}, Y_{O_2}, Y_{H_2O}, Y_{CO_2}, Y_{ПГВ}, Y_M, Y_{N_2}\}^T,$$

$$\bar{S} = \{-W, -2 \frac{M_{O_2}}{M_{CH_4}} W, 2 \frac{M_{H_2O}}{M_{CH_4}} W, \frac{M_{CO_2}}{M_{CH_4}} W, - \sum_{i=1}^N \langle \frac{dm_i}{dt} \rangle n_i, M_{gen}, 0\}^T,$$

$$H = \int_{T_0}^T C_p dT, \quad C_p = \sum_{k=1}^7 Y_k C_{p,k}, \quad S_q = C_{q1} (C_\mu S / \omega^2 - 2D / (3\omega) - 1) \rho \omega q,$$

$$S_\omega = [C_{\omega 1} (C_\mu S / \omega^2 - C_{\omega 3} D / \omega) - C_{\omega 2}] \rho \omega^2,$$

где \bar{Y} – вектор массовых концентраций компонент смеси; Y_M – массовая концентрация инертных продуктов сгорания газогенератора; $q = \sqrt{k}$, $\omega = \varepsilon/k$ – "турбулентные" переменные, связанные с кинетической энергией турбулентности k и со скоростью ее диссипации ε ; $E = C_v T + (u^2 + v^2)/2 + q^2$ – полная удельная энергия; $H = E + p/\rho$ – удельная энтальпия смеси; μ и μ_t – молекулярная и турбулентная вязкости соответственно; p , T – статическое давление и температура; R_0 – газовая постоянная. Величины M_{gen} и Q_{gen} есть источники массы и энергии, моделирующие приход высокотемпературных продуктов сгорания от газогенератора, Q_p , W – удельная теплота горения метана и скорость протекания обобщенной брутто-реакции его горения (2). Члены в угловых скобках означают осреднение по объему ячейки разностной сетки. Константы, входящие в описание модели турбулентности, имели следующие значения:

$$C_{\omega 1} = 0.55, C_{\omega 2} = 0.833, C_{\omega 3} = 0.666, C_\mu = 0.09, C_{q1} = 0.5, \mu_t = C_\mu \rho q^2 / \omega.$$

$$\tau_{xx} = -2\mu_e \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{rr} = -2\mu_e \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \tau_{xr} = \tau_{rx} = -\mu_e \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \phi_x = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \phi_r = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial r},$$

$$\mu_e = \mu + \mu_t, \quad \lambda_e = \lambda + \lambda_t, \quad \lambda_t = \mu_t C_p / Pr_t, \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r}, \quad S = (u_{i,j} + u_{j,i}) u_{i,j} - 2/3 u_{k,k}^2.$$

$$\bar{q}_x = - \left(\frac{\lambda}{C_p} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial \bar{Y}}{\partial x}, \quad \bar{q}_r = - \left(\frac{\lambda}{C_p} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial \bar{Y}}{\partial r},$$

в выражении для S по повторяющимся индексам проводится суммирование (нотация Эйнштейна).

Уравнения движения i -той частицы ПГВ вдоль ее траектории записывались в виде

$$\frac{dm_i}{dt} = -\rho_p d_i^2 \pi \cdot r_p; \quad (12)$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{3 \mu C_{Di} Re_{p,i}}{4 \rho_p d_i^2} (u + u' - u_i); \quad (13)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{3 \mu C_{Di} Re_{p,i}}{4 \rho_p d_i^2} (v + v' - v_i); \quad (14)$$

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{6 \lambda \cdot Nu}{C_i \rho_p d_i^2} (T - T_i); \quad (15)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i; \quad (16)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = v_i, \quad (17)$$

где C_i – удельная теплоемкость частицы; x_i, y_i – ее координаты; n_i – концентрация частиц i – той фракции в ячейке в данный момент времени: $\vec{V}' = \sqrt{2k/3} \operatorname{erfc}^{-1}(N_r) \vec{V} / |\vec{V}|$, \vec{V} – вектор осредненной скорости; \vec{V}' – случайный вектор возмущения скорости газа; N_r – случайное число из диапазона $[-1, +1]$; $\operatorname{erfc}^{-1}()$ – обратная функция ошибок.

Для расчета течения несущего газа применялась противопотоковая LU разностная схема второго порядка точности, обладающая TVD свойствами, близкая к схеме из работы [7]. Расчет движения частиц проводился с помощью А-устойчивой разностной схемы также второго порядка точности [8]

Параллельный алгоритм

Системы уравнений (4 – 11) и (12 -17), описывающие движение несущего газа и взвешенных в нем частиц, связаны между собой только через правые части и для удобства изложения параллельного алгоритма, применяемого для их решения, их удобно записать в векторном виде

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\vec{G})}{\partial r} = \vec{R}(\vec{Q}, \vec{Q}_{pi}), \quad (18)$$

$$\frac{d\vec{Q}_{pi}}{dt} = \vec{H}(\vec{Q}_{pi}, \vec{Q}), \quad (19)$$

где $\vec{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho q, \rho \omega)^T$, $\vec{Q}_{pi} = (m_i, u_i, v_i, T_i, x_i, y_i)^T$. Значения остальных векторов в (18 - 19) понятны из обозначений в уравнениях (4 – 17).

Для численного решения системы уравнений (18), как уже отмечалось выше, применялся метод конечных объемов с использованием противопотоковой разностной LU схемы второго порядка точности. Система линейризовалась по Ньютону и записывалась в т.н. дельта форме. Это означает, что линейризация проводится относительно значений переменных на $n - 1$ -ом временном слое, причем не учитывается зависимость матриц Якоби от этих переменных. В левой части полученной системы сохраняются только члены, отвечающие за первый порядок аппроксимации для невязких членов, а для вязких членов и только члены, аппроксимирующие повторные производные по соответствующим направлениям. К левой части линейризованной таким способом системы добавляется производная по псевдовремени $\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \tau}$, и на каждом временном слое организуется итерационный процесс

$$\left[\frac{V_{i,j}}{\Delta \tau} + \frac{3}{2} \frac{V_{i,j}}{\Delta t} + \tilde{A}_{i+1/2}^- \Delta_{i+1/2} + \tilde{A}_{i-1/2}^+ \Delta_{i-1/2} + \tilde{A}_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} + \tilde{A}_{j-1/2}^+ \Delta_{j-1/2} \right] \Delta \vec{\psi}^{s+1} = - \frac{3(\vec{Q}_{i,j}^{n+1})^s - 4\vec{Q}_{i,j}^n - \vec{Q}_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} V_{i,j} + (\vec{H}_{i,j}^{n+1})^s, \quad (20)$$

где $\Delta\bar{\Psi}^{s+1} = (\bar{Q}^{n+1})^{s+1} - (\bar{Q}^{n+1})^s$; $\bar{H}_{i,j} = -\{(\bar{F} \cdot S)_{i+1/2} - (\bar{F} \cdot S)_{i-1/2} + (\bar{G} \cdot S)_{j+1/2} - (\bar{G} \cdot S)_{j-1/2}\} + V_{i,j} \bar{R}_{i,j}$; $S_{i\pm 1/2}$, $S_{j\pm 1/2}$ - площади граней объема $V_{i,j}$; $(\bar{F} \cdot S)_{i\pm 1/2}$, $(\bar{G} \cdot S)_{j\pm 1/2}$ - соответствующие суммарные (вязкие и невязкие) разностные потоки через эти грани; s , $s+1$ временные шаги по псевдо-времени. После того, как итерации по псевдовремени сойдутся, левая часть системы (20) обратится в нуль, поскольку $\Delta\bar{\Psi}^{s+1} = 0$ и система разностных уравнений (19) будет аппроксимировать систему (4 – 11) на $n+1$ -ом временном слое со вторым порядком точности по времени и по пространству.

Для решения линейных разностных уравнений (20) применяется метод, основанный на LU- факторизации, являющимся по сути попеременно – треугольным методом решения систем линейных алгебраических уравнений. Чтобы избежать процедуру обращения матриц при реализации (20), предварительно упрощают структуру матриц в левой части (20), сводя их к диагональным. При этом скорость сходимости несколько уменьшается, но зато простота структур матриц позволяет свести решение (20) к последовательным скалярным рекуррентным вычислениям типа бегущего счета, что существенно повышает эффективность решения (20). LU алгоритм для решения (20) выполняется в два этапа:

L- обход (последовательное увеличение значений индексов i, j)

$$\Delta\bar{\Psi}_{i,j}^* = B^{-1} \left[-\frac{3(\bar{Q}_{i,j}^{n+1})^s - 4\bar{Q}_{i,j}^n + \bar{Q}_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} V_{i,j} + (\bar{H}_{i,j}^{n+1})^s + \tilde{A}_{i-1/2}^+ \Delta\bar{\Psi}_{i-1,j}^* + \tilde{A}_{j-1/2}^+ \Delta\bar{\Psi}_{i,j-1}^* \right] \quad (21)$$

U- обход (последовательное уменьшение значений индексов i, j)

$$\Delta\bar{\Psi}_{i,j}^{s+1} = \Delta\bar{\Psi}_{i,j}^* - B^{-1} \left[\tilde{A}_{i+1/2}^- \Delta\bar{\Psi}_{i+1,j}^{s+1} + \tilde{A}_{j+1/2}^- \Delta\bar{\Psi}_{i,j+1}^{s+1} \right]. \quad (22)$$

Здесь матрица B также является диагональной и ее обращение не вызывает каких-либо проблем.

Для реализации алгоритма (21) – (22) на вычислительных кластерных системах можно предложить следующий параллельный гибридный алгоритм с использованием систем MPI и OpenMP. Поскольку областью решения является прямоугольник, то для наиболее полной загрузки процессоров за направление счета (по индексам) нужно выбрать то направление, по которому имеется наибольшее число счетных ячеек. Пусть, например, это будет индекс i . По этому индексу область разбивается на M полос по числу имеющихся процессоров, каждая из которых содержит свою часть разностной сетки, и L - обход (21) в каждой из полос реализуется по индексу i «бегущим счетом» при последовательно возрастающих значениях индекса j , начиная с $j=0$. При этом для первой полосы значения величин $\Delta\bar{\Psi}_{-1,j}^*$, $\Delta\bar{\Psi}_{i,-1}^*$ определяются из граничных условий задачи. Когда первый процессор достигает правой границы полосы ($i = m$), значения $\Delta\bar{\Psi}_{m,j}^*$ через процедуры обмена типа “point-to-point” MPI передаются в соседнюю полосу, что позволяет стартовать следующему процессору, а предыдущий начинает счет для следующего индекса $j+1$ и т.д. Реализация U – обхода выполняется аналогичным образом, но начиная с последней полосы в направлении убывания индексов i и j , поскольку значения величин $\Delta\bar{\Psi}_{Ni,j}$, $\Delta\bar{\Psi}_{Ni,Nj+1}$ заданы из граничных условий. Диаграмма работы процессоров показана на рис. 3.

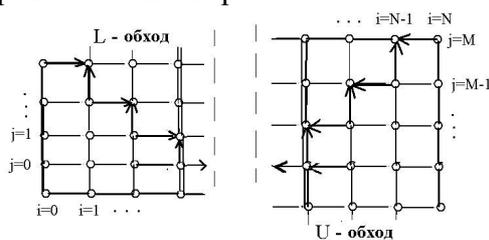


Рис.3. Схема межпроцессорных обменов.

Если процессоры (вычислительные узлы) кластерной системы являются многоядерными, то внутри каждой из полос можно использовать дополнительное распараллеливание с помощью OpenMP (гибридный алгоритм). Возможность такого распараллеливания для L и U обходов обеспечивается структурой информационных связей алгоритма «бегущего счета», изображенных стрелками на рис.3. Уравнения движения частиц (19) интегрируются вдоль их траекторий и при отсутствии взаимодействия между частицами различных

фракций не связаны между собой, что допускает эффективное распараллеливание алгоритма их решения.

При решении уравнений (19), описывающих изменение массовых концентраций химических компонент в смеси, в гибридном алгоритме можно использовать расщепление по физическим процессам, когда значение величин \vec{Y}^{n+1} на следующем временном слое можно вычислять с помощью последовательности операторов, обеспечивающей второй порядок точности:

$$\vec{Y}^{n+1} = L_1(\Delta t/2) \cdot L_2(\Delta t) \cdot L_1(\Delta t/2) \vec{Y}^n,$$

где L_1, L_2 - операторы, первый из которых описывает изменение \vec{Y} в процессах переноса и диффузии, второй – за счет только химических реакций. В этом случае оператор L_1 допускает независимый расчет каждой компоненты вектора \vec{Y} , основу оператора L_2 составляет алгоритм умножения матрицы на вектор, и также допускает распараллеливание. Следует заметить, что аналогичным образом можно учесть и процессы взаимодействия между частицами различных фракций, включая процессы их коагуляции и дробления. Были разработаны три варианта параллельного алгоритма для решения уравнений (18 - 19). Первый из них использовал только систему MPI для организации обменов между вычислительными узлами. Вторым алгоритмом использовалась только система OpenMP без организации обменов между полосами, т.е. решение задачи проводилось на одном вычислительном узле, а вычисления в каждой полосе проводились на своем ядре узла. Третий алгоритм являлся гибридным. Расчеты проводились на кластерной системе DL580G2 (ИВЦ Новосибирского государственного университета), каждый из узлов которой имел восемь ядер.

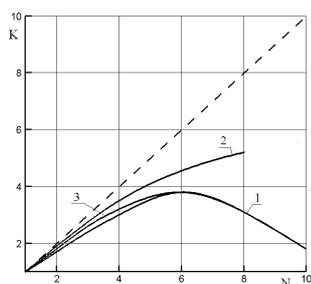


Рис.4. Коэффициент ускорения вычислений

Значения коэффициента ускорения для этих трех алгоритмов приведены на рис.4. Видно, что наилучший результат дает второй алгоритм, поскольку в нем отсутствуют межпроцессорные обмены. Первый алгоритм обеспечивает наибольшее ускорение при использовании шести узлов. Третий (гибридный) алгоритм обладает лишь небольшим преимуществом перед первым, поскольку скорость межпроцессорных обменов в MPI сравнительно невысока.

Список литературы

1. Баратов А. Н., Вогман Л. П. Огнетушащие порошковые составы. М.: Стройиздат, 1982. 72 с.
2. Рычков А.Д., Шокин Ю. И. Генератор наноразмерных аэрозолей для тушения пожаров на газовых скважинах и на разливах нефти//Вычислительные технологии, т.12, № 6, 2007, С. 81-89.
3. Рычков А. Д. Численное моделирование работы импульсной аэрозольной системы пожаротушения при возгораниях жидких углеводородных топлив//Теплофизика и аэромеханика, т.16, № 2, 2009, С. 307-318.
4. Рычков А. Д. Моделирование процесса гашения метановоздушного факела с помощью твердотопливного импульсного генератора аэрозолей//Физика горения и взрыва, т.45, № 3, 2009, С. 26 – 34.
5. Coakley T. J. Turbulence modeling for high speed flows// AIAA Paper, 92- 0436, 1992.
6. Crow, C.T., Review – Numerical models for dilute gas-particles flows//Trans. of ASME J. of Fluid Engineerin, v.104, 1982, pp. 297-303.
7. Yoon S. and Jameson A. An LU-SSOR scheme for the Euler and Navier-Stokes equations// AIAA Paper, 87-600, 1987.
8. Рычков А. Д. Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988, 222 с.