О СТРУКТУРЕ КОМПАКТНЫХ СХЕМ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

В.И. Паасонен
Институт вычислительных технологий СО РАН
e-mail: `paas@ict.nsc.ru`

Исследуется вопрос о структуре разностных схем произвольного порядка аппроксимации в многомерном пространстве на прямоугольных неравномерных сетках. Вводится понятия ранга компактности схемы, связанное с числом уравнений продолженной системы, используемых при построении схемы, и проводится классификация схем произвольного порядка аппроксимации. Исследуется зависимость формы и размеров шаблонов разностных операторов от параметров схемы.

Введение

Вопрос о максимально точных схемах на 9-точечных шаблонах типа “ящик"достаточно хорошо изучен. Так для уравнения Пуассона порядок аппроксимации схемы на квадратной сетке максимум шестой, а на равномерной прямоугольной сетке — четвертый [1]. Также с четвертым порядком аппроксимируются на этом шаблоне уравнения с переменными коэффициентами в декартовой системе координат [2] и в любой криволинейной ортогональной системе координат [3]. При наличии смешанных производных аппроксимация четвертого порядка достижима только при условии пропорциональности квадратов пространственных шагов коэффициентам при вторых производных. Все сказанное выше справедливо также и в многомерном случае. На неравномерных регулярных сетках для упомянутого вида шаблона схемы естественно ожидать падения порядка на единицу, так как в этом случае в разложении погрешности присутствуют слагаемые с нечетными степенями. Обычно схемы повышенной точности для эллиптических уравнений удается обобщить на соответствующие параболические и гиперболические уравнения второго порядка, содержащие также слагаемые с производными первого порядка [3].

Сведения же о схемах на более широких шаблонах, чем 3-точечные в каждом координатном направлении, довольно фрагментарны. Так, известны схемы восьмого порядка точности (см. [4] и библиографию). В качестве другого примера приведем исследование общего характера [5] о числе алгебраических условий на коэффициенты схемы, записанной на произвольном нерегулярном шаблоне для эллиптического уравнения со смешанной производной.

В данной работе проводится систематическое исследование и классификация схем любого порядка аппроксимации на неравномерной регулярной сетке для уравнений с многомерным дифференциальным оператором, представимым в виде суммы одномерных, а также исследуется структура шаблонов схем при порядках аппроксимации выше четвертого.

1. Одномерный случай

Рассмотрим разностную схему

$$A(q,p)y = B(r,t)f \tag{1}$$

с многоточечными операторами

$$A(q,p)y_i = \sum_{j=-q}^{p} \alpha_j y_{i+j}, \quad B(r,t)f_i = \sum_{j=-r}^{t} \beta_j f_{i+j}$$

на неравномерной сетке с пока неопределенными параметрами α_j и β_j.

Предположим, что схема (1) предназначена для аппроксимации дифференциального уравнения

$$y'' = f.$$

Для оператора $A(q,p)$ в левой части разностного уравнения и для осредняющего оператора правой части $B(r,t)$ границы шаблонов различны и произвольны, они определяются любыми фиксированными целыми параметрами q, p, r, t. Для первого оператора это (q,p)-шаблон, включающий данный узел сетки плюс q точек слева и p точек справа от него, для второго это в общем случае отличный от первого (r,t)-шаблон. Условимся, что все коэффициенты оператора схемы и все коэффициенты линейной комбинации значений правой части являются независимыми искомыми параметрами.

Вычислим погрешность схемы на достаточно гладких решениях уравнения:

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=-q}^{p} \alpha_j z_j^m \right) y^{(m)} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=-r}^{t} \beta_j z_j^m \right) f^{(m)}, \tag{2}$$

где $z_j = x_j - x_i$.

Ясно, что в первой сумме разложения (2) не должно быть слагаемых с индексами $m = 0$ и $m = 1$, так как в исходном дифференциальном уравнении не содержатся члены с искомой функцией и ее первой производной. Далее, коэффициент при второй производной при естественном условии нормировки должен быть равен единице. Отсюда следуют уравнения

$$\sum_{j=-q}^{p} \alpha_j = 0, \quad \sum_{j=-q}^{p} \alpha_j \ z_j = 0, \quad \frac{1}{2} \sum_{j=-q}^{p} \alpha_j \ z_j^2 = 1. \tag{3}$$

Отсутствие в первой сумме выражения (2) первых двух слагаемых позволяет сдвинуть в ней индекс суммирования на две единицы, а затем воспользоваться уравнениями продолженной системы $y^{(m+2)} = f^{(m)}$. Приводя затем подобные, приходим к системе условий

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)} \sum_{j=-q}^{p} \alpha_j z_j^{m+2} - \sum_{j=-r}^{t} \beta_j z_j^m = 0, \tag{4}$$

где $m = 0, 1, \ldots, M-1$.

Система условий (3)–(4) гарантирует аппроксимацию исходного уравнения с порядком не ниже M. В зависимости от значения M система может быть неопределенной, однозначно разрешимой или переопределенной. Однозначная разрешимость имеет место при

$$M = \overline{M}, \quad (\overline{M} = p + q + r + t - 1).$$

Это число есть максимально возможный порядок аппроксимации на данном шаблоне (порядок будет выше на единицу, если шаблон симметричен). При бо́льших значениях M система неразрешима, а при меньших имеется параметрический произвол в коэффициентах схемы с числом произвольных параметров $\overline{M} - M$. Число M в системе условий аппроксимации означает число дифференциальных следствий, использованных при построении схемы. При $M = 0$ ни одно уравнение продолженной системы не используется, и схема имеет первый порядок.

Если M в системе (4) меньше своего возможного наибольшего значения $\overline{M}$, то произвол в параметрах, в частности, можно употребить для повышения порядка без привлечения очередных следствий дифференциального уравнения, но тогда рост порядка аппроксимации на каждую единицу накладывает не по одному условию вида (4), а по два условия

$$\sum_{j=-q}^{p} \alpha_j z_j^{m+2} = 0, \qquad \sum_{j=-r}^{t} \beta_j z_j^{m} = 0 \tag{5}$$

для каждого значения $m = M, ..., \tilde{M} - 1$, так как в этом случае требуется обнулить оба слагаемые в очередном члене разложения погрешности в выражении (4), для искомой функции и правой части. Ясно, что в этом случае порядок аппроксимации $\tilde{M}$ будет ниже максимально возможного $\overline{M}$, так как общее число уравнений в системе (3)–(5) только возрастает из-за отказа от использования части уравнений продолженной системы.

Это утверждение можно сформулировать иначе: чем больше число M использованных дифференциальных следствий при фиксированном порядке точности $\tilde{M} \geq M$, тем меньше общее число уравнений в системе (3)–(5) и тем меньше узлов шаблонов схемы требуется привлечь для достижения этого порядка точности.

Таким образом, увеличение M при фиксированном требуемом порядке точности позволяет сократить размеры шаблонов одного или обоих операторов схемы. Поэтому число M может служить мерой или рангом компактности схем повышенной точности. При нулевом ранге схема не компактна вовсе — все уравнения (4) выпадают из системы. При максимально возможном ранге схема на данном шаблоне оказывается максимально точной, и притом единственной с точностью до малых возмущений коэффициентов схемы. При этом группа уравнений (5) не входит в систему уравнений. При возрастании ранга число уравнений группы (4) увеличивается, а группы (5) — уменьшается, поэтому при фиксированных параметрах шаблонов порядок аппроксимации повышается, а при фиксированном порядке аппроксимации шаблоны схемы могут быть уменьшены, поэтому с ростом ранга компактности схема становится все более компактной в геометрическом смысле.

Решая систему уравнений и подставляя найденные коэффициенты в операторы схемы, получим семейство компактных схем любого порядка точности на произвольных шаблонах. Как и в случае 3-точечных операторов, в результате определяются компактные аппроксимации

$$K(q, p, r, t) = (B(r, t))^{-1} A(q, p)$$

произвольного порядка $M \leq p + q + r + t + 1$ для второй производной на произвольном шаблоне.

Аналогично строятся компактные схемы на произвольных шаблонах для более общего уравнения $y^{(K)} = f$ и решается соответствующая задача определения компактных аппроксимаций производной любого порядка. Повторяя проведенные выше рассуждения для этого общего случая, сформулируем условия аппроксимации с порядком M, аналогичные условиям системы (3)–(4):

$$\sum_{j=-q}^{p} \alpha_j \, z_j^k = K! \, \delta_{kK}, \quad k = 0, \ldots, K, \tag{6}$$

$$\frac{m!}{(m+K)!} \sum_{j=-q}^{p} \alpha_j z_j^{m+K} - \sum_{j=-r}^{t} \beta_j z_j^m = 0, \tag{7}$$

где $m = 0, 1, \ldots, M-1$. Максимально возможный порядок аппроксимации в случае уравнения с производной $y^{(K)}$ равен

$$M = \overline{M} - \mathrm{K} = p + q + r + t + 1 - K.$$

При меньших значениях M имеющийся произвол в параметрах схемы можно использовать как описано выше для дополнительного повышения порядка точности до $\tilde{M}$ без привлечения последующих уравнений продолженной системы, налагая вместо одного очередного условия типа (7) по два условия

$$\sum_{j=-q}^{p} \alpha_j z_j^{m+K} = 0, \quad \sum_{j=-r}^{t} \beta_j z_j^m = 0 \tag{8}$$

для каждого значения $m = M, ..., \tilde{M} - 1$

2. Многомерный случай

Представляет интерес вопрос о конфигурации шаблонов компактных схем при произвольных порядках аппроксимации. Рассмотрим в качестве примера уравнение Пуассона в двумерном случае на неравномерной сетке.

Выше была построена компактная аппроксимация произвольного порядка для второй производной, связанная с многоточечными шаблонами для искомой функции и правой части одномерного уравнения. Пусть разностные операторы

$$K_l(q_l, p_l, r_l, t_l) = (B_l(r_l, t_l))^{-1} \, A_l(q_l, p_l)$$

представляют собой компактные аппроксимации вторых производных максимально возможного порядка по двум переменным x_l, $l = 1, 2$. Здесь A_l аппроксимирует соответствующую вторую производную по $q_l + p_l + 1$ узлам, а оператор B_l осредняет правую часть по $r_l + t_l + 1$ узлам со специально подобранными коэффициентами, удовлетворяющими приведенным выше системам уравнений. Уравнение Пуассона аппроксимируем компактной схемой

$$K_1(q_1, p_1, r_1, t_1)u + K_2(q_2, p_2, r_2, t_2)u = f$$

с порядком $\min(M_1, M_2)$. Умножая нашу формально построенную схему на произведение операторов $B_1(r_1, t_1)$, $B_2(r_2, t_2)$, приведем ее к виду

$$B_2(r_2, t_2)A_1(q_1, p_1)u + B_1(r_1, t_1)A_2(q_2, p_2)u =$$

$$= B_1(r_1, t_1)B_2(r_2, t_2)f.$$

Очевидно, что каждое из двух слагаемых левой части схемы использует шаблоны узлов, лежащих в прямоугольниках, размеры которых определяются целочисленными аргументами операторов A_l и B_l. Поэтому полным шаблоном левой части схемы является объединение двух, в общем случае различных, прямоугольных шаблонов. Его условно можно назвать шаблоном “широкий крест”. Шаблоном правой части является, очевидно, сеточный прямоугольник $(t1 + r1 + 1) \times (t2 + r2 + 1)$.

Ясно, что если каждый из параметров операторов осреднения (значений r_l и t_l) не превосходят параметров q_l и p_l операторов левой части, то прямоугольный шаблон правой части совпадает с пересечением двух прямоугольников широкого креста. Если же ситуация прямо противоположная, то шаблон правой части, напротив, представляет собой минимальный прямоугольник, который полностью содержит в себе упомянутый выше “широкий крест”. Если в исходных операторах A_l и B_l использовать один и тот же шаблон (т. е. если $p_l = t_l$ и $q_l = r_l$ для обоих координатных направлений), то шаблон “широкий крест” превращается в прямоугольник, $(q_l + p_l + 1)$-точечный по $l-$ му направлению. В этом случае шаблон для искомой функции и для правой части совпадают. Надо полагать, что этот частный случай наиболее интересен с практической точки зрения.

В трехмерном пространстве шаблон схемы представляет собой совокупность узлов сетки, принадлежащих объединению трех брусков, ориентированных по координатным направлениям. Прибегая к военно-технической аналогии можно сказать, что в общем случае шаблон выглядит подобно противотанковому ежу. При этом правая часть записывается на шаблоне, имеющем вид параллелепипеда. Шаблон правой части лежит в пересечении элементов “ежа”, если каждое из чисел r_l и t_l при всех l меньше, чем каждое из q_l и p_l, и, наоборот, охватывает “еж” полностью, если соотношения между параметрами противоположны. При совпадении параметров операторов левой и правой части для одномерных разностных уравнений шаблон левой части превращается в параллелепипед, при этом шаблоны правой части и искомой функции оказываются одинаковыми, как и в двумерном случае. Очевидно, этот случай равновесия шаблонов представляет наибольший интерес, как и в плоском случае.

Аналогично строятся схемы при большем числе измерений, если многомерный оператор представляет собой сумму одномерных дифференциальных операторов. При этом шаблон схемы имеет описанную выше структуру, но многомерную. Необходимо подчеркнуть, что когда смешанных производных нет, то для построения компактной схемы любой точности доступны методы исчерпания погрешности, неопределенных коэффициентов и компактных аппроксимаций. Если же левая часть дифференциального уравнения не представляется в виде суммы одномерных операторов, например, содержит смешанные производные, то метод компактных аппроксимаций не может быть применен. В таком случае следует прибегать к методу исчерпания погрешности или методу неопределенных коэффициентов непосредственно в многомерной постановке. При этом на свободу выбора формы шаблонов нет никаких ограничений.

В заключение заметим, что в рамках данной работы рассмотрены только аппроксимационные вопросы. Устойчивость схем, свойства систем уравнений для определения коэффициентов схем, степень их обусловленности в зависимости от размеров шаблона представляет отдельную задачу.

Список литературы

[1] Микеладзе Ш.Е. О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов // Известия АН СССР. Серия матем. 1941. Т. 5, № 1. С. 57–74.

[2] Самарский А.А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1963. Т. 3, № 5. С. 812–840.

[3] Паасонен В.И. Компактные схемы для систем уравнений второго порядка с конвективными членами // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 1. С. 55–66.

[4] Шапеев В.П. Неявная разностная схема с погрешностью аппроксимации $O(\tau^4, h^4)$ для уравнения теплопроводности // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, № 5. С. 114–121.

[5] Паасонен В.И. О компактных разностных схемах на нерегулярных сетках для эллиптических уравнений // Вестник Новосибирского государственного университета. 2001. Т. 1, Выпуск 2. С. 92–107.