МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ УПРУГОЙ 3-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Г.Л. Горынин
Сургутский государственный университет

Ю.В. Немировский
Институт теоретической и прикладной механики СО РАН им. С.А. Христиановича
e-mail: `nemirov@itam.nsc.ru`

Рассмотрен метод усреднения, позволяющий получать усредненные характеристики для упругой 3-периодической среды без введения каких-либо гипотез. Усредненные характеристики вычисляются как интегралы жесткостных функций, которые находятся путем решения семейства рекуррентных задач на периодической ячейке. Получены асимптотические формулы, позволяющие по усредненным величинам восстанавливать значения перемещений и напряжений в каждой точке 3-периодического континуума.

Постановка задачи.

Рассмотрим трехмерную упругую среду, упругие характеристики которой периодически меняются вдоль всех трех пространственных осей x, y, z, так, что можно считать эту среду разбитой на периодически повторяющиеся кубы с ребрами параллельными координатным осям и имеющими размер h. Внутри каждого куба упругие характеристики меняются либо непрерывно, либо скачком. С физической точки зрения последний случай соответствует наличию внутри куба разнородных механических сред. В дальнейшем такую среду будем называть 3-периодичной. Пусть $u_x,\ u_y,\ u_z$ – перемещения точек стержня в направлении осей x, y, z соответственно; $\sigma_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора напряжения; $[f]$ – скачок величины f на границе перехода от одной упругой среды к другой с разными свойствами; n_x, n_y, n_z – компоненты вектора единичной нормали к какой-либо поверхности тела либо к границе раздела разных упругих сред, $(\mathrm{E}_{\alpha\beta\varphi\psi})_i$ – упругие постоянные, внутри каждой упругой среды они могут непрерывно меняться, а на границах сред претерпевать скачки.

Рассмотрим тело вырезанное из 3-периодичной среды, на которое действуют какие-либо нагрузки, тогда внутри тела должны выполняться уравнения равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha x}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{\alpha y}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{\alpha z}}{\partial z}+F_\alpha=0,\alpha=\{x,\,y,\,z\}\,; \tag{1}$$

где F_α - объемные силы.
На границе перехода от одной упругой среды к другой должны быть непрерывны перемещения и контактные напряжения:

$$[\sigma_{\alpha n}]=0,[u_\alpha]=0,\alpha=\{x,\,y,\,z\}\,, \tag{2}$$

где $\sigma_{\alpha n}$ - контактные напряжения, которые по определению вычисляются по следующей формуле

$$\sigma_{\alpha n}=\sigma_{\alpha x}n_x+\sigma_{\alpha y}n_y+\sigma_{\alpha z}n_z. \tag{3}$$

Считаем, что материал упругой среды является анизотропным, закон Гука для которого в каждой точке содержит 21 независимую константу $\mathrm{E}_{\alpha\beta\varphi\psi}$ и имеет вид [1]:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{\varphi\le\psi} \mathrm{E}_{\alpha\beta\varphi\psi} e_{\varphi\psi}, \alpha, \beta, \varphi, \psi \in \{x, y, z\}\,. \tag{4}$$

Компоненты тензора деформаций связаны с компонентами вектора перемещений следующими соотношениями:

$$e_{\alpha\beta} = 0.5\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial\alpha}\right), \alpha,\ \beta \in \{x,\ y,\ z\}\,. \tag{5}$$

Если к задаче (1)-(5) добавить краевые условия на поверхности исследуемого тела, заданные либо путем задания поверхностных сил, действующих на тело, либо путем задания кинематических ограничений на перемещение точек поверхности, то получится стандартная краевая задача пространственной теории упругости. Эту задачу можно было бы, например, решать стандартными пакетами прикладных программ, основанных на методе конечных элементов. Однако, решение данной задачи усложняется тем, что упругие характеристики $\mathrm{E}_{\alpha\beta\varphi\psi}$ в соответствии с определением трех-периодичной среды являются быстро меняющимися периодическими функциями пространственных координат, поэтому для сохранения минимальной точности требуется использовать слишком большое число конечных элементов, размеры которых должны быть как минимум соизмеримы с размерами каждой из сред, составляющих собой периодическую ячейку. С вычислительной точки зрения такие задачи являются чрезмерно громоздкими и неповоротливыми. Кроме того проблемы возникают и при анализе полученных численных результатов, вычисленные перемещения и напряжения являются сильно осциллирующими функциями и такие осцилляции очень трудно отделить от осциллирующих ошибок округления. Традиционной альтернативой к использованию численных методов в чистом виде для задач с сильно осциллирующими коэффициентами со времен Анри Пуакаре является использование асимптотических методов. Основная идея асимптотического метода – это замена задачи с быстроосциллирующими коэффициентами на другую задачу с постоянными коэффициентами, причем результат по решению последней задачи позволяет получить результат по решению первой. В данной работе используется метод асимптотического расщепления. Данный метод был разработан ранее авторами для решения совсем другого класса задач: задач изгиба, растяжения и кручения слоистых стержней и плит. Оказывается предложенный метод обладает удивительной универсальностью и может быть положен в основу теории периодических сред.

Пусть $\tilde{u}$ – характерное значение для перемещения u_x, h – линейный размер периодической ячейки (куба), L – характерный размер тела, $\tilde{E}$ – характерное среднее значение модуля Юнга. Перейдем к безразмерным переменным и функциям, для простоты не меняя их обозначения:

$$x \leftrightarrow x/L,\ y \leftrightarrow y/L,\ \ z \leftrightarrow z/L,\ u_\alpha \leftrightarrow u_\alpha/h, \mathrm{E}_{\alpha\beta\varphi\psi} \leftrightarrow \mathrm{E}_{\alpha\beta\varphi\psi}\Big/\tilde{\mathrm{E}},$$

$$\sigma_{\alpha\beta} \leftrightarrow \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\tilde{E}}, q_\alpha \leftrightarrow \frac{q_\alpha}{\tilde{E}}, \tilde{F}_\alpha = \frac{F_\alpha h}{\tilde{E}}. \tag{6}$$

В дальнейшем будем считать, что отношение размера периодической ячейки упругой среды к характерному размеру тела является малым параметром и обозначается буквой

ε:

$$\varepsilon = \frac{h}{L} << 1. \tag{7}$$

Тогда уравнения (1) в новых переменных примут вид

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha x}}{\partial x}\varepsilon + \frac{\partial \sigma_{\alpha y}}{\partial y}\varepsilon + \frac{\partial \sigma_{\alpha z}}{\partial z}\varepsilon + F_\alpha = 0, \alpha = \{x,\, y,\, z\}\,; \tag{8}$$

Равенства (2), (2)-(4) останутся без изменений, а выражение (5) примет вид

$$e_{\alpha\beta} = 0.5\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta}\varepsilon + \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha}\varepsilon\right), \alpha,\, \beta \in \{x,\, y,\, z\}\,. \tag{9}$$

Быстрые переменные для периодических сред

Внутри каждого периодически повторяющегося куба положение точки однозначно описывается тремя безразмерными координатами ξ_x, ξ_y, ξ_z с помощью формул

$$x = x_i + \xi_x\varepsilon, y = y_j + \xi_y\varepsilon, z = z_j + \xi_z\varepsilon, \xi_x,\xi_y,\xi_z \in [0,1]\,, \tag{10}$$

где x_i, y_i,z_i - координаты вершины i-го периодического куба. Координаты ξ_x, ξ_y, ξ_z обычно называют «быстрыми» в противоположность «медленным» координатам x, y, z.
Потребуем также условия периодичности неизвестных функций по быстрым переменным:

$$u_\alpha\left(\bar{\xi},\bar{r}\right)\Big|_{\xi_\gamma=0} = u_\alpha\left(\bar{\xi},\bar{r}\right)\Big|_{\xi_\gamma=1}, \sigma_{\alpha\beta}\left(\bar{\xi},\bar{r}\right)\Big|_{\xi_\gamma=0} = \sigma_{\alpha\beta}\left(\bar{\xi},\bar{r}\right)\Big|_{\xi_\gamma=1}, \alpha,\, \beta, \gamma \in \{x,\, y,\, z\}\,. \tag{11}$$

С учетом равенств (10) и (7) оператор частного дифференцирования принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}, \alpha \in \{x,\, y,\, z\}\,. \tag{12}$$

Задача (1)-(5) с учетом формулы (12) для дифференциального оператора принимает вид

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha x}}{\partial x}\varepsilon + \frac{\partial \sigma_{\alpha y}}{\partial y}\varepsilon + \frac{\partial \sigma_{\alpha z}}{\partial z}\varepsilon + \frac{\partial \sigma_{\alpha x}}{\partial \xi_x} + \frac{\partial \sigma_{\alpha y}}{\partial \xi_y} + \frac{\partial \sigma_{\alpha z}}{\partial \xi_z} + F_\alpha = 0, \alpha = \{x,\, y,\, z\}\,; \tag{13}$$

условие на границе перехода от одной упругой среды к другой:

$$[\sigma_{\alpha n}] = 0, [u_\alpha] = 0, \alpha = \{x,\, y,\, z\}\,; \tag{14}$$

закон Гука:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{\varphi \le \psi} \mathrm{E}_{\alpha\beta\varphi\psi} e_{\varphi\psi}, \alpha, \beta, \varphi, \psi \in \{x, y, z\}\,; \tag{15}$$

формулы для компонент тензора деформаций:

$$e_{\alpha\beta} = 0.5\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta}\varepsilon + \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha}\varepsilon + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi_\alpha}\right), \alpha,\, \beta \in \{x,\, y,\, z\}\,. \tag{16}$$

Процедура расщепления в общем виде.

Введем обозначения

$$\bar{k} = (k_x, k_y, k_z) = k_x\bar{M}_x + k_y\bar{M}_y + k_z\bar{M}_z, \left|\bar{k}\right| = k = k_x + k_y + k_z, \partial\bar{r}^{\bar{k}} = \partial x^{k_x}\partial y^{k_y}\partial z^{k_z}. k_\alpha \geq 0, k_\alpha \in Z, \tag{17}$$

Примем, в соответствии с общей идеей метода асимптотического расщепления [1], предположение, что перемещения точек тела являются линейной комбинацией дифференциальных операторов, действующих в направлении пространственных координат x, y, z:

$$(u_\alpha^\eta)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k}(U_\alpha^\eta)^{\bar{k}}\frac{\partial^k\eta_0^{(n)}}{\partial\bar{r}^{\bar{k}}}\varepsilon^k\right), \left(\sigma_{\alpha\beta}^\eta\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k}\left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)^{\bar{k}}\left(\bar{\xi}\right)\frac{\partial^k\eta_0^{(n)}}{\partial\bar{r}^{\bar{k}}}\varepsilon^k\right),$$

$$\alpha, \beta \in \{x, y, z\}. \tag{18}$$

где $\eta_0^{(n)}(x, y, z)$– некоторая функция, зависящая только от медленных переменных (x, y, z); $(U_\alpha^\eta)^{\bar{k}}\left(\bar{\xi}\right)$,$\left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)^{\bar{k}}\left(\bar{\xi}\right)$ – жесткостные функции вектора перемещения и тензора напряжений, зависящие только от быстрых переменных ξ_x, ξ_y, ξ_z и являющиеся периодическими по ним.

Далее будем считать, что объемные силы имею расщепленный вид относительно медленных и быстрых переменных:

$$F_\alpha\left(\bar{r}, \bar{\xi}\right) = q_\alpha\left(\bar{\xi}\right)f_\alpha\left(\bar{r}\right), \left\langle q_\alpha\left(\bar{\xi}\right)\right\rangle = 1, \alpha \in \{x,\, y,\, z\}. \tag{19}$$

Считаем, что подобно компонентам вектора напряжений и тензора напряжений усредненные объемные силы также могут быть разложены в суммы степеней дифференциальных операторов:

$$f_\alpha\left(\bar{r}\right) = -\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k}(B_\alpha^\eta)^{\bar{k}}\frac{\partial^k\eta_0^{(n)}}{\partial\bar{r}^{\bar{k}}}\varepsilon^k\right), \alpha \in \{x,\, y,\, z\}, \tag{20}$$

где $(B_\alpha^\eta)^{\bar{k}}$- некоторые константы с векторным верхним индексом, которые будут определены позднее.

Подставим формулы (18)-(20) в равенства задачи (13)-(16) и приравняем коэффициенты при степенях дифференциальных операторов. Получим систему рекурсивных краевых задач на ячейках периодичности для жесткостных функций, зависящих от быстрых переменных:

система уравнений

$$\frac{\partial\left(\tau_{\alpha x}^\eta\right)^{\bar{k}}}{\partial\xi_x} + \frac{\partial\left(\tau_{\alpha y}^\eta\right)^{\bar{k}}}{\partial\xi_y} + \frac{\partial\left(\tau_{\alpha z}^\eta\right)^{\bar{k}}}{\partial\xi_z} + \left(\tau_{\alpha x}^\eta\right)^{\bar{k}-\bar{M}_x} + \left(\tau_{\alpha y}^\eta\right)^{\bar{k}-\bar{M}_y} + \left(\tau_{\alpha z}^\eta\right)^{\bar{k}-\bar{M}_z} - q_\alpha\left(\bar{\xi}\right)_\alpha^{\bar{k}} = 0; \tag{21}$$

формулы связи между жесткостными функциями

$$\left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)^{\bar{k}} = 0.5\sum_{\varphi\leq\psi}\mathrm{E}_{\alpha\beta\varphi\psi}\left(\frac{\partial\left(U_\varphi^\eta\right)^{\bar{k}}}{\partial\xi_\psi} + \frac{\partial\left(U_\psi^\eta\right)^{\bar{k}}}{\partial\xi_\varphi} + \left(U_\varphi^\eta\right)^{\bar{k}-\bar{M}_\psi} + \left(U_\psi^\eta\right)^{\bar{k}-\bar{M}_\varphi}\right); \tag{22}$$

условия на границах разных сред внутри ячейки

$$\left[\left(\tau_{\alpha n}^{\eta}\right)^{\bar{k}}\right] = 0, \left[\left(U_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}\right] = 0, \alpha = \{x,\, y,\, z\}\,, \tag{23}$$

где

$$\left(\tau_{\alpha n}^{\eta}\right)^{\bar{k}} = \left(\tau_{\alpha x}^{\eta}\right)^{\bar{k}} n_x + \left(\tau_{\alpha y}^{\eta}\right)^{\bar{k}} n_y + \left(\tau_{\alpha y}^{\eta}\right)^{\bar{k}} n_z; \tag{24}$$

условие периодичности жесткостных функций

$$\left(U_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}\left(\bar{\xi}\right)\Big|_{\xi_\gamma=0} = \left(U_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}\left(\bar{\xi},\bar{r}\right)\Big|_{\xi_\gamma=1}, \left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)^{\bar{k}}\left(\bar{\xi}\right)\Big|_{\xi_\gamma=0} = \left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)^{\bar{k}}\left(\bar{\xi}\right)\Big|_{\xi_\gamma=1}, \alpha,\, \beta, \gamma \in \{x,\, y,\, z\}\,. \tag{25}$$

Равенства (21)-(25) для каждого фиксированного целочисленного вектора $\bar{k}$ представляют собой краевую эллиптическую задачу на нахождение периодических жесткостных функций вектора перемещений.

Применим операцию усреднения к равенству (21) тогда получим формулу для вычисления констант $\left(B_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}$:

$$\left(B_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}} = \left\langle \left(\tau_{\alpha x}^{\eta}\right)^{\bar{k}-\bar{M}_x} + \left(\tau_{\alpha y}^{\eta}\right)^{\bar{k}-\bar{M}_y} + \left(\tau_{\alpha z}^{\eta}\right)^{\bar{k}-\bar{M}_z} \right\rangle, \alpha = \{x,\, y,\, z\}\,, \tag{26}$$

это равенство должно быть присоединено к задаче (21)-(25).

Окончательная структура усредненной задачи

Задача (21)-(26) при k=0 имеет три независимых решения, каждое из них определяет свою независимую функцию $\eta_0^{(n)}$. С учетом сказанного равенство принимает вид:

$$\sum_{\eta_0\in\{v_x,v_y,v_z\}} \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k} \left(B_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}} \frac{\partial^k \eta_0^{(n)}}{\partial \bar{r}^{\bar{k}}} \varepsilon^k \right) + f_\alpha\left(\bar{r}\right) = 0, \alpha \in \{x,\, y,\, z\}\,. \tag{27}$$

Правые слагаемые равенств (27) – это заданные функции объемной нагрузки, которые могут быть произвольными. Коэффициенты левой части $\left(B_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}}$ находятся из равенств (26) на основе решений краевых задач на ячейке (21)-(25). Поэтому три равенства (27) – это система уравнений в частных производных для нахождения функций v_x, v_y, v_z. Эти функции имеют физический смысл средних перемещений по ячейке вдоль координатных осей. Если к уравнениям (27) добавить краевые условия на поверхности тела, то получится эллиптическая задача на средние перемещенияv_x, v_y, v_z. Если рассматривать только регулярные асимптотические решения этой задачи, то задача распадется на семейство задач при $k \in \{1, n\}$, каждая из которых тождественна пространственной задаче теории упругости для однородной среды. Перемещения и напряжения в каждой точке 3-периодического тела выражаются в виде сумм дифференциальных операторов от средних перемещенийv_x, v_y, v_z:

$$\left(u_\alpha\right)^{(n)} = v_\alpha^{(n)} + \sum_{\eta_0\in\{v_x,v_y,v_z\}} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k} \left(U_{\alpha}^{\eta}\right)^{\bar{k}} \frac{\partial^k \eta_0^{(n)}}{\partial \bar{r}^{\bar{k}}} \varepsilon^k \right), \alpha \in \{x, y, z\}\,; \tag{28}$$

$$\left(\sigma_{\alpha\beta}\right)^{(n)} = \sum_{\eta_0 \in \{v_x, v_y, v_z\}} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k} \left(\tau^{\eta}_{\alpha\beta}\right)^{\bar{k}} \frac{\partial^k \eta_0^{(n)}}{\partial \bar{r}^{\bar{k}}} \varepsilon^k \right). \tag{29}$$

Усредненные модули упругости для 3-периодической среды вычисляются по формулам:

$$\hat{\mathrm{E}}_{\alpha\beta\varphi\psi} = \frac{2}{(1+\delta_{\varphi\psi})} \left(B^{u_\varphi}_{\alpha}\right)^{\bar{M}_\beta + \bar{M}_\psi}. \tag{30}$$

Таким образом, рассмотренный метод усреднения позволяет получать усредненные характеристики для упругой 3-периодической среды без введения каких-либо гипотез. Усредненные характеристики вычисляются как интегралы жесткостных функций, которые находятся путем решения семейства рекуррентных задач на периодической ячейке. Получены асимптотические формулы, позволяющие по усредненным величинам восстанавливать значения перемещений и напряжений в каждой точке 3-периодического континуума.

Список литературы

[1] Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Деформирование слоистых анизотропных стержней в пространственной постановке. 1: Продольно-поперечный изгиб и условие кромочной совместимости // Механика композитных материалов. 2009. Т. 45, № 3. С. 379–410.