УДК.517.928.977.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Жайнаков А.Ж.
Национальная Академия Наук, г. Бишкек. Кыргызская Республика.
Jainakov-41@mail.ru.
Аширбаев Б.Ы
Кыргызский Государственный Технический Университет им. И.Раззакова, г. Бишкек Кыргызская Республика
beishen@mail.ru

В данной статье предложен приближенный способ определения оптимального управления, который основан на разделении медленных и быстрых координат вектора состояния методом интегрального многообразия, что позволяет ограничиваться рассмотрением «укороченной» системы меньшей размерности вместо исходной системы, имеющей более высокий порядок.

Рассматриваемая задача оптимального управления состоит в следующем: требуется найти r- мерную непрерывную вектор-функцию $u(t)$, доставляющую минимум функционалу

$$J(u) = d^* x(T,\mu) + c^* z(T,\mu) + \frac{1}{2}\int_0^T u^*(t) R u(t) dt \tag{1}$$

на траекториях системы

$$\dot{y} = A(\mu) y + B(\mu) u, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

где

$y = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$, $A(\mu) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{\mu}A_3 & \frac{1}{\mu}A_4 \end{pmatrix}$, $B(\mu) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{1}{\mu}B_2 \end{pmatrix}$, $x \in R^n$, $z \in R^m$, $\mu > 0$ - малый параметр, $T > 0$ -фиксированное число, $*-$знак транспонирования, $d, c-$векторы с размерностью $n, m,$ $R-$положительно определенная постоянная матрица с размерностью $m \times n$, $A_1 - (n \times n)$, $A_2 - (n \times m)$, $A_3 - (m \times n)$, $A_4 - (m \times m)$, $B_1 - (n \times r)$, $B_2 - (m \times r)-$ постоянные матрицы.

Интеграл в формуле (1) оценивает энергии управляющего воздействия затрачиваемого в процессе управления.

Предположим, что вещественные части корней матрицы A_4 отрицательные.

Систему (2) можно переписать в виде:

$$\dot{x} = A_1 x + A_2 z + B_1 u, \qquad x(0) = x_0, \quad x \in R^n, \tag{3}$$

$$\mu \dot{z} = A_3 x + A_4 z + B_2 u, \qquad z(0) = z_0, \quad z \in R^m,$$

Гамильтониан оптимальной задачи (1), (3) для отыскания минимума энергетического потребления определяется в виде

$$H=\frac{1}{2}(u,\,Ru)+(p,\,A_1x+A_2z+B_1u)+(q,\,A_3x+A_4z+B_2u), \qquad (4)$$

где векторы p и q являются решениями сопряженной системы

$$\dot p=-A_1^*p-A_3^*q, \qquad (5)$$
$$\mu\dot q=-A_2^*p-A_4^*q$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$p(T,\mu)=-d,\qquad q(T,\mu)=-\frac{c}{\mu}. \qquad (6)$$

Условие

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0, \qquad (7)$$

должно быть выполнено вдоль оптимальной траектории [1] и означает

$$\frac{\partial H}{\partial u}=Ru+B_1^*p+B_2^*q=0. \qquad (8)$$

По предположению корни характеристического уравнения матрицы A_4 имеют отрицательные вещественные части, тогда система (5) имеет пограничный слой и для нее существует интегральное многообразие [2] $q=h(\mu)p,$ где $h(\mu)-m\times n-$мерная матрица элементы, которой обычно зависят от μ.

Матрица $h(\mu)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\mu h(A_1^*+A_3^*h)=A_2^*+A_4^*h. \qquad (9)$$

Решение уравнение (9) можно построить в виде сходящегося степенного ряда [2]

$$h(\mu)=h_0+h_1\mu+h^2\mu^2+\ldots \qquad (10)$$

где

$$h_0=-A_4^{*-1}A_2^*,\quad h_1=A_4^{*-1}h_0(A_1^*+A_3^*h_0),\ldots$$
$$h_i=A_4^{*-1}\left(h_{i-1}A_1^*+\sum_{j=0}^{i-1}h_jA_3^*h_{-j-1+i}\right),\ldots,\quad i=1,2,\ldots$$

Замена $q=\eta+hp$ приводит систему (5) к виду:

$$\dot p=-(A_1^*+A_3^*h)p-A_3^*\eta,\quad p(T,\mu)=-d, \qquad (11)$$
$$\mu\dot\eta=-(A_4^*-\mu hA_3^*)\eta,\quad \eta(T,\mu)=-\frac{c}{\mu}+hd=\eta_0.$$

Тогда решение системы (11) с начальными условиями (6) записывается в виде

$$p(t)=\overline{p}(t)+m_1(\tau),\qquad q(t)=h(\mu)\overline{p}(t)+m_2(\tau), \qquad (12)$$

где

$\overline{p}(t)=e^{-(A_1^*+A_3^*h)(t-T)}(-d+\Delta p_0)-$ решение системы

$$\dot{\overline{p}}=-(A_1^*+A_3^*h)\overline{p},\quad \overline{p}(T,\mu)=-d+\Delta p_0, \qquad (13)$$
$$\Delta p_0=\int_{-\infty}^{T}e^{-(A_1^*+A_3^*h)(T-s)}A_3^*e^{-(A_4^*-\mu hA_3^*)\frac{s-T}{\mu}}\eta_0ds,$$
$$m_1=\mu\int_{-\infty}^{T}e^{-(A_1^*+A_3^*h)(\tau-\sigma)}A_3^*e^{-(A_4^*-\mu hA_3^*)\sigma}\eta_0d\sigma,\quad m_2=e^{-(A_4^*-\mu hA_3^*)\tau}\eta_0.$$

Функции m_1 и m_2 удовлетворяют неравенствам:

$$\|m_1\| \le \mu C_1 \|\eta_0\| e^{\xi\tau}, \qquad \|m_2\| \le C_2 \|\eta_0\| e^{\xi\tau}, \tag{14}$$

где $C_1, C_2, \xi - const, \quad \tau = \dfrac{t-T}{\mu} \le 0.$

Если выбрать начальную точку $\left(-d, -\dfrac{c}{\mu}\right)$ принадлежащую интегральному многообразию $q = h(\mu)p,$ то $\eta_0 = 0, \; m_1 = 0, \; m_2 = 0$ и следовательно, $p = \bar{p}, \quad q = h(\mu)\bar{p} -$ решение системы (5), траектория которого лежит на этом многообразии. Таким образом, для произвольной точки (p_0, q_0) указана такая точка $(p_0 = \bar{p}_0 + \Delta p_0, \bar{q}_0 = h(\mu)\bar{p}_0)$ лежащую на интегральном многообразии $q = h(\mu)p,$ что решение системы (5) выходящие из точки (p_0, q_0) при $t = T \; (\tau = 0),$ неограниченно приближается к решению при $\tau \to -\infty$ $p = \bar{p}, \quad q = h(\mu)\bar{p}, \quad p(T) = p_0,$ лежащему на этом многообразии. С учетом соотношений из (12) формула (8) записывается в виде

$$u(t,\mu) = -R^{-1}\left(\bar{B}^{*} e^{-A_0^*(t-T)}\alpha_1 + \frac{1}{\mu}\bar{B}_2^{*} e^{-A_4^*\tau}\alpha_2\right) = \Psi(t,\mu), \tag{15}$$

где

$$\bar{B}_1^* = B_1^* + B_2^* h, \quad \bar{B}_2^* = B_2^* + \mu B_1^* A_3^* (A_4^* - \mu h A_3^*)^{-1} + O\left(\mu^2 e^{\theta\tau}\right), \quad (\theta > 0), \tag{16}$$

$$\alpha_1 = \alpha_1(\mu) = -d + \Delta p_0, \qquad \alpha_2 = -C + \mu h d, \quad \bar{A}_1^* = A_1^* + A_3^* h, \quad \bar{A}_4^* = A_4^* - \mu h A_3^*.$$

При $\mu \to 0$ имеем следующие предельные соотношения:

$$\lim \bar{B}_1 = B_0 = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2, \quad \lim \bar{B}_2 = B_2, \quad \lim \bar{A}_0 = A_0 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3,$$
$$\lim \bar{A}_4 = A_4, \quad \lim \alpha_1 = -d + A_3^* A_4^{*-1} C, \quad \lim \alpha_2 = C.$$

С учетом (15) система (3) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + A_2 z + \varphi_1, \qquad x(0,\mu) = x_0, \\ \mu\dot{z} &= A_3 x + A_4 z + \varphi_2, \qquad z(0,\mu) = z_0, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\varphi_1 = B_1\Psi, \quad \varphi_2 = B_2\Psi,$ а $\Psi(t,\mu)$ известная функция, определенная формулой (15).

В отличие от (5) система (17) имеет интегральное многообразие

$$z = K(\mu)x + \varpi(t,\mu), \tag{18}$$

движение по которому описывается системой

$$\dot{x} = (A_1 + A_2 K)x + A_3\varpi + \varphi_1. \tag{19}$$

Матрица K и вектор ϖ являются решениями уравнений:

$$\begin{aligned} &\mu K(A_1 + A_2 K) = A_3 + A_4 K, \\ &\mu\frac{\partial\varpi}{\partial t} + \mu K(A_2\varpi + \varphi_1) = A_4\varpi + \varphi_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Аналогично вышеуказанному, уравнения (20) также имеют решения, которые могут быть представлены в виде сходящихся степенных рядов

$$K = K_0 + \mu K_1 + \ldots + \mu^n K_n + \ldots,$$
$$\varpi(t,\mu) = \varpi_0(t) + \mu\varpi_1(t) + \ldots + \mu^n\varpi_n(t) + \ldots.$$

Для функции входящие в правые части системы (17) можно записать конечные асимптотические разложения по степеням μ, коэффициенты которых однозначно определяются из соотношения (20) путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ.

Произведя в системе (17) замену

$$z = K(\mu)x + \varpi(t,\mu) + y, \tag{21}$$

можно разделить быстрые и медленные движения, перейдя к системе

$$\dot{x} = (A_1 + A_2K)x + A_2\varpi + \varphi_1 + A_2y, \qquad x(0,\mu) = x_0, \tag{22}$$

$$\mu\dot{y} = (A_4 - \mu KA_2)y, \qquad y(0\mu) = z_0 - Kx_0 - \varpi(0) = y_0.$$

Аналогично, как это делалось выше для системы (5), решение системы (22) можно записать в форме (12).

Список использованной литературы:

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – Москва: Наука. 1961. – 391 с.

2. Иманалиев З.К. Метод интегральных многообразий в линейной сингулярно-возмущенной задаче оптимального управления с квадратичным функционалом //Компьютеры в учебном процессе и современные проблемы математики. Материалы IV Республиканской научно-методической конференции. – Бишкек, 1996.- Ч. 2. - С.191 –196.

3. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. - Москва: Наука, 1988.- 256 с.

4. Геращенко Е.И., Геращенко С.И. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. – Москва: Наука, 1975. – 295 с.