МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ТРАНСПОРТИРОВКИ НЕФТИ

Л.В.Топко[1], Ю.А.Залюбовская[2]
[1]Павлодарский государственный университет им.С.Торайгырова, Павлодар, Казахстан
[2] Павлодарский государственный университет им.С.Торайгырова, Павлодар, Казахстан

MODELLING OF RANDOMS PROCESSES OF TRANSPORTATION OF OIL

L.V.Topko[1], Y.A.Zalyubovskaya[2]
[1] The Pavlodar state university of S.Torajgyrova, Pavlodar, Kazakhstan
[2] The Pavlodar state university of S.Torajgyrova, Pavlodar, Kazakhstan

In job the questions of modeling of processes of transportation of oil on pipelines taking into account casual influences are considered. Processes of transportation of oil on pipelines are subject to various factors of casual character. Numerical calculations with confidential intervals for temperature and pressure are resulted.

Теплогидравлические процессы в магистральных нефтепроводах подвержены воздействиям случайного характера. Случайными величинами и функциями в уравнениях транспортировки нефти [1-5] являются коэффициент теплопередачи от нефти в окружающую среду, температура окружающей среды, эмпирические коэффициенты в формуле потерь напора на трение и др.

Температурные условия поверхности грунта определяются теплообменом на поверхности грунта, он включает в себя радиационный теплообмен, конструктивно-конвективный теплообмен между грунтом и воздухом. На температурный режим поверхности грунта также существенное влияние оказывает растительный покров, снежный покров, который благодаря своей малой теплопроводности уменьшает глубину промерзания зимой. Отметим, что все эти факторы теплообмена носят случайный характер.

На тепловой режим надземного нефтепровода определяющее влияние оказывает температура воздуха, которая является случайной функцией времени. В связи с этим тепловой режим надземного нефтепровода также имеет случайный характер. Поэтому для надземных нефтепроводов можно говорить только о вероятностном прогнозировании параметров теплогидравлических режимов на основе статистических характеристик температуры воздуха и на основе методов теории вероятности и математической статистики получать оценку искомых параметров.

В силу этого случайными функциями будут температура и давление нефти. Следовательно, описание этих параметров можно представить статистической моделью транспортировки нефти [6].

Процессы транспортировки нефти по трубопроводу диаметра D, длины L, описываемый системой дифференциальных уравнений [1-6]

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\vartheta\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{4k}{\rho c D}(\theta_e-\theta)+\frac{4W}{\rho c\pi D^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-\rho g\gamma\frac{v^m}{D^{m+1}}\left(\frac{\pi\vartheta}{4}\right)^{2-m}-\rho g\frac{dH_b}{dx}, \qquad (2)$$

$$(t,x)\in Q=(0,T)\times(0,L)$$

с начальным

$$\theta(0,x)=\theta_0(x), \quad x\in(0,L) \qquad (3)$$

и граничными условиями

$$\theta(t,0)=\alpha(t), \quad P(t,0)=\beta(t), \quad t\in(0,T), \qquad (4)$$

где t - время; x - пространственная координата; $\theta=\theta(t,x)$ - температура нефти; $P=P(t,x)$ - давление нефти; $\vartheta=\vartheta(t)$ - скорость движения нефти; $k=k(t,x)$ - коэффициент теплопередачи от нефти в окружающую среду; ρ - плотность нефти; c - удельная теплоемкость нефти; $\theta_e = \theta_e(t,x)$ - температура окружающей среды; $W = W(t,x)$ - мощность теплового потока от стенки трубопровода к нефти; γ, m - эмпирические коэффициенты, зависящие от режима течения нефти; g - ускорение свободного падения; $\nu = \nu(\theta)$ - коэффициент кинематической вязкости; $H_b = H_b(x)$ - высота нефтепровода над уровнем моря; $\theta_0(x)$ - распределение температуры нефти по длине нефтепровода в начальный момент времени; $\alpha(t), \beta(t)$ - температура и давление нефти на входе в трубопровод.

Процессы транспортировки нефти по трубопроводам подвержены различным факторам случайного характера. Так, например, случайными величинами являются параметры k, θ_e, γ, m и др.

Будем считать, что случайные параметры k, θ_e, γ, m распределены по нормальному закону. Случайные величины k, θ_e, γ, m разыграем методом Монте-Карло. Реализации случайных величин определяются по формулам [7]:

$$\theta_e^q = \sigma(\theta_e) z^q + M(\theta_e); \quad k^q = \sigma(k) z^q + M(k);$$
$$\gamma^q = \sigma(\gamma) z^q + M(\gamma); \quad m^q = \sigma(m) z^q + M(m), \tag{5}$$
$$q = 1,2,....,N,$$

где $M(\theta_e), M(k), M(\gamma), M(m)$ - математические ожидания случайных величин θ_e, k, γ, m - соответственно;

$\sigma(\theta_e), \sigma(k), \sigma(\gamma), \sigma(m)$ - среднеквадратические отклонения случайных величин θ_e, k, γ, m соответственно;

z^q - нормальные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и со среднеквадратическим отклонением равным единице;

N - число разыгранных реализаций.

Задачу (1)-(4) запишем при конкретных реализациях вектора

$$S^q = (k^q, \theta_e^q, \gamma^q, m^q), \quad q = 1,2,..., N \tag{6}$$

в следующем виде:

$$\frac{\partial \theta^q}{\partial t} + \vartheta \frac{\partial \theta^q}{\partial x} = \frac{4k^q}{\rho c D}(\theta_e{}^q - \theta) + \frac{4W}{\rho c \pi D^2}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial P^q}{\partial x} = -\rho g \gamma^q \frac{\nu^{m^q}(\theta^q)}{D^{m^q+1}} \left(\frac{\rho \vartheta}{4}\right)^{2-m^q} - \rho g \frac{dH_в}{dx}, \tag{8}$$

$$(t,x) \in Q,$$

$$\theta^q(0,x) = \theta_0(x), x \in (0,L), \tag{9}$$

$$\theta^q(t,0) = \alpha(t), \quad P^q(t,0) = \beta(t), \quad t \in (0,T). \tag{10}$$

Численные расчеты уравнений процесса (1)-(4) для каждого $q = 1,2,..., N$ проводились методом конечных разностей.

Разобьем отрезок $[0,L]$ на N равных отрезков, а отрезок $[0,T]$ разобьем на M равных отрезков и построим в прямоугольную сетку

$$\overline{Q}_{\tau h} = \{t_i, \ x_j \mid \ t_i = i\tau, \ \tau = T/M, \ i = \overline{0,M};$$

$$x_j = jh, \ h = L/N, \ j = \overline{0,N}\}.$$

Будем обозначать $\varphi_j^i = \varphi(t_i, x_j)$ значения функций φ в узле (t_i, x_j) сетки $\overline{Q}_{\tau h}$.
Систему (7),(9),(10) аппроксимируем неявной разностной схемой,

$$\frac{\theta_j^{i+1}-\theta_j^i}{\tau}+\vartheta\frac{\theta_j^{i+1}-\theta_{j-1}^{i+1}}{h}=\frac{4k}{\rho cD}(\theta_e-\theta_j^i)+\frac{4W_j^i}{\rho cD^2},$$

$$i=\overline{0,M-1};\quad j=\overline{1,N},$$

$$\theta_j^0=\theta_0(x_j)\quad j=\overline{0,N},$$

$$\theta_0^i=\alpha(t_i),\quad i=\overline{0,M},$$

а систему (8), (10) аппроксимируем разностной схемой

$$\frac{P_j^i-P_{j-1}^i}{h}=-\rho g\gamma\frac{(\nu_j^i)^m}{D^{m+1}}\left(\frac{\pi\vartheta}{4}\right)^{2-m}-\rho g\frac{dH}{dx},$$

$$i=\overline{0,M};\quad i=\overline{N-1};$$

$$P_0^i=\beta(t_i),\quad i=\overline{0,M},$$

Вычислим реализации θ^q, P^q в узлах сетки $\overline{\theta}_{\tau h}$, которые обозначим следующим образом:

$$\theta_{i,j}^q=\theta^q(t_i,x_j),\quad P_{i,j}^q=P^q(t_i,x_j).$$

Теперь, используя методы математической статистики, можно вычислить оценки математических ожиданий и дисперсий температуры θ и давления P в узлах сетки $\overline{Q}_{\tau h}$:

$$\overline{\theta}_{i,j}=\frac{1}{N}\left(\sum_{q=1}^{N}\theta_{i,j}^q\right),\quad \overline{P}_{i,j}=\frac{1}{N}\left(\sum_{q=1}^{N}P_{i,j}^q\right)$$

$$D_{i,j}^\theta=\frac{1}{1-N}\left(\sum_{q=1}^{N}(\theta_{i,j}^q-\overline{\theta}_{i,j})^2\right),\quad D_{i,j}^P=\frac{1}{1-N}\left(\sum_{q=1}^{N}(P_{i,j}^q-\overline{P}_{i,j})^2\right),$$

$$i=\overline{0,M};\quad j=\overline{0,N},$$

где N – объем выборки,

$\overline{\theta}_{i,j},\overline{P}_{i,j}$ - выборочные (генеральные) средние оценки математических ожиданий,

$D_{i,j}^\theta, D_{i,j}^P$ - оценки генеральной дисперсии.

Зная, законы распределения температуры и давления нефти в узлах сетки можно определить доверительные интервалы для оценок математических ожиданий и дисперсий.

Оценки $\overline{\theta}_{i,j}$, $\overline{P}_{i,j}$ являются несмещенными и состоятельными [7, с.314],

$$M(\overline{\theta}_{i,j})=\frac{\sum_{i=1}^{N}M(\theta_{i,j})}{N}=M(\theta_{i,j}),\quad M(\overline{P}_{i,j})=\frac{\sum_{i=1}^{N}M(P_{i,j})}{N}=M(P_{i,j})\qquad(11)$$

и согласно закону больших чисел при увеличении числа розыгрышей величины $\overline{\theta}_{i,j}$, $\overline{P}_{i,j}$ сходятся по вероятности к $M(\theta_{i,j})$, $M(P_{i,j})$.

Проверим состоятельность и несмещённость оценок дисперсий [7, с.317].

$$\overline{D}_{i,j}^\theta=\frac{N}{N-1}\cdot\frac{\sum_{q=1}^{N}\left(\theta_{i,j}^q-\overline{\theta}_{i,j}\right)^2}{N}=\frac{1}{N-1}\left[\sum_{q=1}^{N}\left(\theta_{i,j}^q\right)^2-2\overline{\theta}_{i,j}\sum_{q=1}^{N}\theta_{i,j}^q+\left(\overline{\theta}_{i,j}\right)^2\right]=\qquad(12)$$

$$=\frac{1}{N-1}\left[\sum_{q=1}^{N}\left(\theta_{i,j}^q\right)^2-\left(\overline{\theta}_{i,j}\right)^2\right].$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N}{N-1}=1;\ \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{q=1}^{N}\left(\theta_{i,j}^{q}\right)^2}{N}=M\left(\theta_{i,j}^{q}\right)^2;\ \lim_{N\to\infty}\left(\theta_{i,j}^{q}\right)^2=\left(M\left(\theta_{i,j}^{q}\right)\right)^2.$$

$$M\left(\theta_{i,j}^{q}\right)-\left(M\left(\theta_{i,j}^{q}\right)\right)^2=D\left(\theta_{i,j}\right).$$

Из (12) следует, что оценки дисперсий состоятельны [7, с.317].

$$\overline{D}_{i,j}^{q}=\frac{N}{N-1}\left[\frac{\sum_{q=1}^{N}\left(\theta_{i,j}^{q}\right)^2}{N}-\left(\frac{\sum_{q=1}^{N}\theta_{i,j}^{q}}{N}\right)^2\right]=\frac{N}{N-1}\left[\frac{\sum_{q=1}^{N}\left(\theta_{i,j}^{q}\right)^2}{N}-\frac{\sum_{q=1}^{N}\left(\theta_{i,j}^{q}\right)^2}{N^2}-2\frac{\sum_{q<r}\theta_{i,j}^{q}\theta_{i,j}^{r}}{N^2}\right]. \qquad (13)$$

Найдем математическое ожидание величины (13).

$$M\left(\overline{D}_{i,j}^{q}\right)=\frac{1}{N}\sum_{q=1}^{N}M\left(\left(\theta_{i,j}^{q}\right)^2\right)-\frac{2(N-1)}{N}\sum_{q<r}M\left(\theta_{i,j}^{q}\theta_{i,j}^{r}\right),$$

$$M\left(\theta_{i,j}^{2}\right)=D\left(\theta_{i,j}\right),\quad \sum_{q=1}^{N}M\left(\left[\theta_{i,j}^{q}\right]^2\right)=N\cdot D\left(\theta_{i,j}\right).$$

В силу независимости опытов [7,с.322]

$$M\left(\theta_{i,j}^{q}\theta_{i,j}^{r}\right)=0,$$

и, следовательно,

$$M\left(\overline{D}_{i,j}^{\theta}\right)=D\left(\theta_{i,j}\right),$$

это означает несмещённость оценок дисперсий.

Теперь найдем доверительные интервалы для математического ожидания температуры и давления нефти, т.е. найдем интервалы

$$I_{\beta_\theta}^{\theta}(i,j)=\left(\overline{\theta}_{i,j}-\varepsilon_{i,j}^{\theta},\overline{\theta}_{i,j}+\varepsilon_{i,j}^{\theta}\right),\quad I_{\beta_P}^{P}(i,j)=\left(\overline{P}_{i,j}-\varepsilon_{i,j}^{P},\overline{P}_{i,j}+\varepsilon_{i,j}^{P}\right),$$

где $\varepsilon_{i,j}^{\theta}$, $\varepsilon_{i,j}^{P}$ - неизвестные положительные числа, зависящие соответственно от заданных доверительных вероятностей β_θ, β_p.

Эти зависимости выражаются формулами [7]

$$P\left(\left|\overline{\theta}_{i,j}-M\left(\theta_{i,j}\right)\right|<\varepsilon_{i,j}^{\theta}\right)=\beta_\theta \quad P\left(\left|\overline{P}_{i,j}-M\left(P_{i,j}\right)\right|<\varepsilon_{i,j}^{P}\right)=\beta_P, \qquad (14)$$

где $M\left(\theta_{i,j}\right)$, $M\left(P_{i,j}\right)$ - точные значения математических ожиданий температуры и давления нефти.

Введем обозначения для доверительных интервалов: $D\left(\theta_{i,j}\right)=\overline{D}_{i,j}^{\theta}$, $D\left(P_{i,j}\right)=\overline{D}_{i,j}^{P}$.

Перепишем (14) в развернутом виде

$$P\left(M\left(\theta_{i,j}\right)-\varepsilon_{i,j}^{\theta}<\overline{\theta}_{i,j}<M\left(\theta_{i,j}\right)+\varepsilon_{i,j}^{\theta}\right)=\beta_\theta,$$

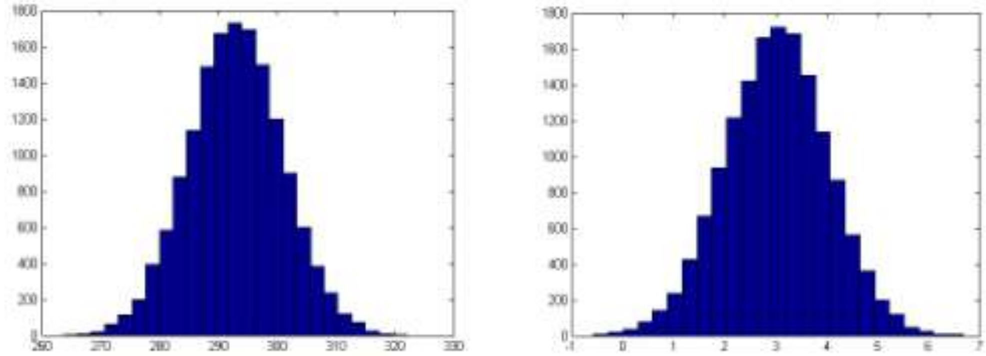
$$P\left(M\left(P_{i,j}\right)-\varepsilon_{i,j}^{P}<\overline{P}_{i,j}<M\left(P_{i,j}\right)+\varepsilon_{i,j}^{P}\right)=\beta_P.$$

Согласно центральной предельной теореме Ляпунова при $N\to\infty$ оценки $\overline{\theta}_{i,j},\overline{P}_{i,j}$ распределены по нормальному закону, тогда доверительные интервалы будут иметь вид:

$$I_{\beta_\theta}^{\theta}(i,j)=\left(\sigma_{i,j}^{\theta}-\arg\Phi\left(\frac{1+\beta_\theta}{2}\right)\sqrt{\frac{\overline{D}_{i,j}^{\theta}}{N}},\theta_{i,j}+\arg\Phi\left(\frac{1+\beta_\theta}{2}\right)\sqrt{\frac{\overline{D}_{i,j}^{\theta}}{N}}\right),$$

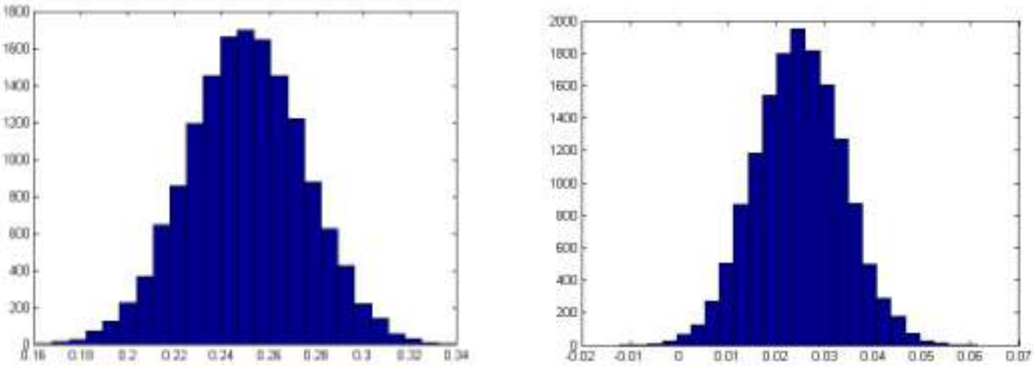
$$I_{\beta_P}^{P}(i,j)=\left(\sigma_{i,j}^{P}-\arg\Phi\left(\frac{1+\beta_P}{2}\right)\sqrt{\frac{\overline{D}_{i,j}^{P}}{N}},P_{i,j}+\arg\Phi\left(\frac{1+\beta_P}{2}\right)\sqrt{\frac{\overline{D}_{i,j}^{P}}{N}}\right),$$

Результаты численных расчетов разыгрываемых величин приведены на рисунках 1, 2



а) б)

Рис.1. Гистограмма частот коэффициента θ_e - а), k – б) при $N=15000$:



а) б)

Рис.2. Гистограмма частот коэффициента m – а), γ - б) при $N=15000$:

Список литературы

1. Черняев Т.К., Галямов А.К., Юкин А.Ф., Бондаренко П.М. Трубопроводный транспорт нефти в сложных условиях эксплуатации. – М.: Недра, 1990. – 232 с.
2. Агапкин Б.М., Кривошеин Б.Л., Юфин В.А. Тепловой и гидравлический расчеты трубопроводов для нефти и нефтепродуктов. М.: Недра, 1981. – 256 с.
3. Гусейнзаде М.А., Юфин В.А. Неустановившееся движение нефти и газа в магистральных трубопроводах. - М.: Недра, 1981. – 232 с.
4. Evseyeva A.U., Neronov V.S. The mathematical model of the viscoplastic fluids flow through the pipelines// Modeling, Simulation & Control, Ser. B, AMSE Press France, 1988. – Vol.18. – P. 31-42.
5. Жумагулов Б.Т., Смагулов Ш.С., Евсеева А.У., Нестеренкова Л.А. Трубопроводный транспорт высоковязких высокозастывающих нефтей. – Алматы.: Гылым, 2002. – 140с.
6. Неронов В.С. Оптимальное управление процессами с распределенными параметрами. – Астана: Изд-во Евразийск. гос.ун-та им. Л.Н.Гумилева, 2001. - 148 с.
7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.