***

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Анцыз Сергей Матвеевич

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Тринадцатая международная азиатская школа-семинар "Проблемы оптимизации сложных систем"

21 сентября 2017, Академгородок, Новосибирск, Россия

В опубликованной в XIX веке работе Эджворта [1] автор объясняет преимущества прогрессивного налога. Большинство дальнейших публикаций по данной тематике использует для исследований аппарат вариационного исчисления и равновесный анализ, т.е. непрерывные модели (см. [2-5]). Исследуя модификацию модели Рамсея ([2],[6]), в которой изучаются вопросы, связанные с налогообложением фондов, А.А. Рылова в [7], установила, что плоская шкала налогов позволяет государству получить средств больше, чем непрерывный аналог прогрессивного налога. Этот неожиданный результат потребовал проверки с использованием других моделей, желательно, более адекватных экономической практике.

В [7] изучалась иерархическая система, состоящая из управляющего органа и нескольких инвесторов (предприятий). В качестве экономического регулятора на уровне государства используются пропорциональный или прогрессивный налоги на основные фонды предприятий, а на уровне инвесторов регулятором является доля дохода, направляемая на инвестиции. База: модификация модели Рамсея-Солоу, в каждый момент времени в которой доход $Y(t) = F(K(t))$ состоит из налога $N(t)$, потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + N(t).$$

$N(t) = \rho(Y(t))Y(t)$, $C(t) = (1 - \rho(Y(t))(1 - s(t))Y(t)$,
$I(t) = (1 - \rho(Y(t))s(t)Y(t)$, $0 \leq s(t) \leq 1$, $0 \leq \rho(Y(t)) \leq 1$,

где $s(t)$ – часть выпуска, которая идет на инвестиции, $\rho(Y(t))$ – ставка налогообложения.

Здесь аргумент производственной функции $Y(t) = F(K(t))$ капитал $K(t)$. Вид функции $\rho(Y(t))$ зависит от формы налогообложения.

Пусть налогом облагаются только фонды: $\rho(Y(t)) = \rho(K(t))$ Вид функции $\rho(K(t))$ зависит от формы налогообложения.

В [7] изучалась иерархическая система, состоящая из управляющего органа и нескольких инвесторов (предприятий). В качестве экономического регулятора на уровне государства используются пропорциональный или прогрессивный налоги на основные фонды предприятий, а на уровне инвесторов регулятором является доля дохода, направляемая на инвестиции. База: модификация модели Рамсея-Солоу, в каждый момент времени в которой доход $Y(t)=F(K(t))$ состоит из налога $N(t)$, потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$:

$$Y(t)=C(t)+I(t)+N(t).$$

$N(t)=\rho(Y(t))Y(t)$, $C(t)=(1-\rho(Y(t))(1-s(t))Y(t)$,
$I(t)=(1-\rho(Y(t))s(t)Y(t)$, $0\le s(t)\le 1$, $0\le\rho(Y(t))\le 1$,

где $s(t)$ – часть выпуска, которая идет на инвестиции, $\rho(Y(t))$ – ставка налогообложения.

Здесь аргумент производственной функции $Y(t)=F(K(t))$ капитал $K(t)$. Вид функции $\rho(Y(t))$ зависит от формы налогообложения.

Пусть налогом облагаются только фонды: $\rho(Y(t))=\rho(K(t))$ Вид функции $\rho(K(t))$ зависит от формы налогообложения.

В [7] изучалась иерархическая система, состоящая из управляющего органа и нескольких инвесторов (предприятий). В качестве экономического регулятора на уровне государства используются пропорциональный или прогрессивный налоги на основные фонды предприятий, а на уровне инвесторов регулятором является доля дохода, направляемая на инвестиции. База: модификация модели Рамсея-Солоу, в каждый момент времени в которой доход $Y(t) = F(K(t))$ состоит из налога $N(t)$, потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + N(t).$$

$N(t) = \rho(Y(t))Y(t)$, $C(t) = (1 - \rho(Y(t))(1 - s(t))Y(t)$,
$I(t) = (1 - \rho(Y(t))s(t)Y(t)$, $0 \leq s(t) \leq 1$, $0 \leq \rho(Y(t)) \leq 1$,

где $s(t)$ – часть выпуска, которая идет на инвестиции, $\rho(Y(t))$ – ставка налогообложения.

Здесь аргумент производственной функции $Y(t) = F(K(t))$ капитал $K(t)$. Вид функции $\rho(Y(t))$ зависит от формы налогообложения.

Пусть налогом облагаются только фонды: $\rho(Y(t)) = \rho(K(t))$ Вид функции $\rho(K(t))$ зависит от формы налогообложения.

Новые переменные: $k = K/L$ – фондовооруженность и удельное потреблению, новая функция $f(k) = F(K/L)$ удовлетворяет неоклассическим условиям, (L – труд). Производственные фонды амортизируют с темпом μ и пусть ν — годовой темп изменения числа занятых.

Задача инвестора (предприятия)

Для заданной функции $\rho(k)$ нужно максимизировать функционал

$$\int_0^T (1 - s(t))(f(k(t)) - \rho(k)k(t))e^{-\delta t}dt \to \max_{s(t)} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = (f(k(t)) - \rho(k)k(t))s(t) - \lambda k(t), \quad \lambda = (\mu + \nu), \tag{2}$$

$$0 \leq s(t) \leq 1, \tag{3}$$

$$k(0) = k_0, \quad k(T) \geq k_T > 0. \tag{4}$$

Здесь δ – коэффициент дисконтирования.

Новые переменные: $k = K/L$ – фондовооруженность и удельное потреблению, новая функция $f(k) = F(K/L)$ удовлетворяет неоклассическим условиям, (L – труд). Производственные фонды амортизируют с темпом μ и пусть ν — годовой темп изменения числа занятых.

Задача инвестора (предприятия)

Для заданной функции $\rho(k)$ нужно максимизировать функционал

$$\int_0^T (1 - s(t))(f(k(t)) - \rho(k)k(t))e^{-\delta t} dt \to \max_{s(t)} \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = (f(k(t)) - \rho(k)k(t))s(t) - \lambda k(t), \quad \lambda = (\mu + \nu), \qquad (2)$$

$$0 \leq s(t) \leq 1, \qquad (3)$$

$$k(0) = k_0, \quad k(T) \geq k_T > 0. \qquad (4)$$

Здесь δ – коэффициент дисконтирования.

Задача Управления

Задача государства заключается в выборе схемы налогообложения ρ, которая максимизирует функционал

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} \int_0^T N_i(t) e^{-\delta t} dt$$

при условиях, что доля выпуска $s(t)$ определяется в результате решения задачи инвестора (1)-(4).

Прогрессивная схема налогообложения моделируется возрастающей выпуклой вниз функцией, ставка налога при которой определяется, например, формулой $\rho(K) = \chi K$, где $0 \leq \chi_2 Y(t) \leq 1$. Уравнение (2) в этом случае принимает вид:

$$\dot{k}(t) = (f(k(t)) - \chi k^2(t)L)s(t) - \lambda k(t), \quad \lambda = (\mu + \nu),$$

а функционал:

$$\int_0^T (1 - s(t))(f(k(t)) - \chi k^2(t)L)e^{-\delta t}dt \to \max_{s(t)}$$

В [7] для частного вида производственной функции $F(K) = aK^b$ показано, что с точки зрения государства пропорциональный налог на имущество более эффективен, чем прогрессивный налог (в рассмотренной в работе форме). Однако для этой гипотезы необходима дополнительная проверка, например, при изучении дискретных аналогов этой модели.

- Л.В. Канторович, В.Л. Макаров

- Анцыз С.М., Донсков И.В., Маршак В.Д., Чупин В. Г. Оптимизация системных решений в распределенных базах данных. – Новосибирск:Наука. Сиб. отд-ние, 1990.

- Ю.Б. Гермейер, Н.Н. Моисеев

- Двухуровневое (bilevel) программирование
  NP-трудные (Ben-Ayed, O. and Blayer, C. Computational difficulties of bilevel linear programming // Operation Research 38: 556-560, 1990.)
  06.08.2010 Винэй Деолаликар
  11.08.2017 Норберт Блюм

- $NP \neq P \Longrightarrow$ не существует эффективных алгоритмов ?

- Л.В. Канторович, В.Л. Макаров

- Анцыз С.М., Донсков И.В., Маршак В.Д., Чупин В. Г. Оптимизация системных решений в распределенных базах данных. – Новосибирск:Наука. Сиб. отд-ние, 1990.

- Ю.Б. Гермейер, Н.Н. Моисеев

- Двухуровневое (bilevel) программирование
  NP-трудные (Ben-Ayed, O. and Blayer, C. Computational difficulties of bilevel linear programming // Operation Research 38: 556-560, 1990.)
  06.08.2010 Винэй Деолаликар
  11.08.2017 Норберт Блюм

- $NP \neq P \Longrightarrow$ не существует эффективных алгоритмов ?

- Л.В. Канторович, В.Л. Макаров

- Анцыз С.М., Донсков И.В., Маршак В.Д., Чупин В. Г. Оптимизация системных решений в распределенных базах данных. – Новосибирск:Наука. Сиб. отд-ние, 1990.

- Ю.Б. Гермейер, Н.Н. Моисеев

- Двухуровневое (bilevel) программирование
  NP-трудные (Ben-Ayed, O. and Blayer, C. Computational difficulties of bilevel linear programming // Operation Research 38: 556-560, 1990.)
  06.08.2010 Винэй Деолаликар
  11.08.2017 Норберт Блюм

- $NP \neq P \Longrightarrow$ не существует эффективных алгоритмов ?

- Л.В. Канторович, В.Л. Макаров

- Анцыз С.М., Донсков И.В., Маршак В.Д., Чупин В. Г. Оптимизация системных решений в распределенных базах данных. – Новосибирск:Наука. Сиб. отд-ние, 1990.

- Ю.Б. Гермейер, Н.Н. Моисеев

- Двухуровневое (bilevel) программирование
NP-трудные (Ben-Ayed, O. and Blayer, C. Computational difficulties of bilevel linear programming // Operation Research 38: 556-560, 1990.)
06.08.2010 Винэй Деолаликар
11.08.2017 Норберт Блюм

- $NP \neq P \Longrightarrow$ не существует эффективных алгоритмов ?

- Л.В. Канторович, В.Л. Макаров

- Анцыз С.М., Донсков И.В., Маршак В.Д., Чупин В. Г. Оптимизация системных решений в распределенных базах данных. – Новосибирск:Наука. Сиб. отд-ние, 1990.

- Ю.Б. Гермейер, Н.Н. Моисеев

- Двухуровневое (bilevel) программирование
NP-трудные (Ben-Ayed, O. and Blayer, C. Computational difficulties of bilevel linear programming // Operation Research 38: 556-560, 1990.)
06.08.2010 Винэй Деолаликар
11.08.2017 Норберт Блюм

- $NP \neq P \Longrightarrow$ не существует эффективных алгоритмов ?

- Л.В. Канторович, В.Л. Макаров

- Анцыз С.М., Донсков И.В., Маршак В.Д., Чупин В. Г. Оптимизация системных решений в распределенных базах данных. – Новосибирск:Наука. Сиб. отд-ние, 1990.

- Ю.Б. Гермейер, Н.Н. Моисеев

- Двухуровневое (bilevel) программирование
  NP-трудные (Ben-Ayed, O. and Blayer, C. Computational difficulties of bilevel linear programming // Operation Research 38: 556-560, 1990.)
  06.08.2010 Винэй Деолаликар
  11.08.2017 Норберт Блюм

- $NP \neq P \Longrightarrow$ не существует эффективных алгоритмов ?

- Л.В. Канторович, В.Л. Макаров

- Анцыз С.М., Донсков И.В., Маршак В.Д., Чупин В. Г. Оптимизация системных решений в распределенных базах данных. – Новосибирск:Наука. Сиб. отд-ние, 1990.

- Ю.Б. Гермейер, Н.Н. Моисеев

- Двухуровневое (bilevel) программирование
  NP-трудные (Ben-Ayed, O. and Blayer, C. Computational difficulties of bilevel linear programming // Operation Research 38: 556-560, 1990.)
  06.08.2010 Винэй Деолаликар
  11.08.2017 Норберт Блюм

- $NP \neq P \Longrightarrow$ не существует эффективных алгоритмов ?

- Л.В. Канторович, В.Л. Макаров

- Анцыз С.М., Донсков И.В., Маршак В.Д., Чупин В. Г. Оптимизация системных решений в распределенных базах данных. – Новосибирск:Наука. Сиб. отд-ние, 1990.

- Ю.Б. Гермейер, Н.Н. Моисеев

- Двухуровневое (bilevel) программирование
  NP-трудные (Ben-Ayed, O. and Blayer, C. Computational difficulties of bilevel linear programming // Operation Research 38: 556-560, 1990.)
  06.08.2010 Винэй Деолаликар
  11.08.2017 Норберт Блюм

- $NP \neq P \Longrightarrow$ не существует эффективных алгоритмов ?

- Л.В. Канторович, В.Л. Макаров

- Анцыз С.М., Донсков И.В., Маршак В.Д., Чупин В. Г. Оптимизация системных решений в распределенных базах данных. – Новосибирск:Наука. Сиб. отд-ние, 1990.

- Ю.Б. Гермейер, Н.Н. Моисеев

- Двухуровневое (bilevel) программирование
  NP-трудные (Ben-Ayed, O. and Blayer, C. Computational difficulties of bilevel linear programming // Operation Research 38: 556-560, 1990.)
  06.08.2010 Винэй Деолаликар
  11.08.2017 Норберт Блюм

- $NP \neq P \Longrightarrow$ не существует эффективных алгоритмов ?

- Л.В. Канторович, В.Л. Макаров

- Анцыз С.М., Донсков И.В., Маршак В.Д., Чупин В. Г. Оптимизация системных решений в распределенных базах данных. – Новосибирск:Наука. Сиб. отд-ние, 1990.

- Ю.Б. Гермейер, Н.Н. Моисеев

- Двухуровневое (bilevel) программирование
NP-трудные (Ben-Ayed, O. and Blayer, C. Computational difficulties of bilevel linear programming // Operation Research 38: 556-560, 1990.)
06.08.2010 Винэй Деолаликар
11.08.2017 Норберт Блюм

- $NP \neq P \Longrightarrow$ не существует эффективных алгоритмов ?

Рассмотрим модель следующего вида.
Инвесторы $k \in \mathcal{K}$ определяют векторы продуктов и фондов (производственных мощностей) X_{kt}, Y_{kt} такие, что достигают максимума их интегральное потребление.
Пусть заданы A_{kt}- матрицы затрат фондов, Y_{k0} - векторы объема имеющихся производственных мощностей, C_1 - векторы цен на выпускаемую продукцию, C_2 - векторы цен приобретаемых фондов, b_{k0} - начальные капиталы инвесторов.

Обозначим далее:
λ_k – доля дохода, направляемая на потребление,
$\varphi(x) = \rho(x)x$ – объем средств, которое Управление получает в виде налогов, если величина налоговой базы равна x.

Рассмотрим модель следующего вида.
Инвесторы $k \in \mathcal{K}$ определяют векторы продуктов и фондов (производственных мощностей) X_{kt}, Y_{kt} такие, что достигают максимума их интегральное потребление.
Пусть заданы A_{kt}- матрицы затрат фондов, Y_{k0} - векторы объема имеющихся производственных мощностей, C_1 - векторы цен на выпускаемую продукцию, C_2 - векторы цен приобретаемых фондов, b_{k0} - начальные капиталы инвесторов.

Обозначим далее:
λ_k – доля дохода, направляемая на потребление,
$\varphi(x) = \rho(x)x$ – объем средств, которое Управление получает в виде налогов, если величина налоговой базы равна x.

Задача инвестора(предприятия)

$$\lambda_k \sum_{t=1}^{T} C_1 X_{kt} e^{-\alpha t} \to \max! \tag{5}$$

$$A_{kt} X_{kt} - \sum_{\tau=1}^{t} Y_{k\tau} \le Y_{k0}, \quad t = \overline{1, T}, \tag{6}$$

$$C_2 Y_{k1} \le b_{k0} - \varphi(C_2 Y_{k0}),$$

$$C_2 Y_{kt} - (1-\lambda_k) \sum_{\tau=1}^{t-1} C_1 X_{k\tau} + \sum_{\tau=1}^{t-1} C_2 Y_{k\tau} + \varphi(\sum_{\tau=0}^{t-1} C_2 Y_{k\tau}) \le b_{k0}, \quad t = \overline{2, T}, \tag{7}$$

$$(1-\lambda_k) C_1 X_{kT} - \varphi(\sum_{t=0}^{T} C_2 Y_{kt}) \ge 0, \tag{8}$$

$$X_{kt} \ge 0, Y_{kt} \ge 0, \quad t = \overline{1, T}, \quad \lambda_k \in (0, 1]. \tag{9}$$

Задача управления

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} \varphi\Big(\sum_{\tau=0}^{t} C_2 Y_{k\tau}\Big) e^{-\alpha t} \to \max! \qquad (10)$$

либо максимизация темпов роста

$$\min_{t=\overline{1,T}} \sum_{k \in \mathcal{K}} C_1 X_{kt} \Big/ \sum_{k \in \mathcal{K}} C_1 X_{kt-1} \to \max!$$

Задача управления

$$\sum_{k\in\mathcal{K}}\sum_{t=1}^{T}\varphi\Big(\sum_{\tau=0}^{t} C_2 Y_{k\tau}\Big)e^{-\alpha t} \to \max! \qquad (10)$$

либо максимизация темпов роста

$$\min_{t=\overline{1,T}} \sum_{k\in\mathcal{K}} C_1 X_{kt} \Big/ \sum_{k\in\mathcal{K}} C_1 X_{kt-1} \to \max!$$

$$\rho(y) = \chi, \quad \varphi(y) = \chi y, \chi \in [0, 1].$$

Задача предприятия

Определить константу λ_k и векторы X_{kt}, Y_{kt} такие, что достигает максимума функционал

$$\Phi_k(\lambda_k) = \lambda_k \sum_{t=1}^{T} C_1 X_{kt} e^{-\alpha t}$$

и выполняются условия: (6),(9) и

$$C_2 Y_{k1} \leq b_{k0} - \chi(C_2 Y_{k0}),$$

$$C_2 Y_{kt} - (1-\lambda_k) \sum_{\tau=1}^{t-1} C_1 X_{k\tau} + \sum_{\tau=1}^{t-1} C_2 Y_{k\tau} + \chi(\sum_{\tau=0}^{t-1} C_2 Y_{k\tau}) \leq b_{k0}, \quad t = \overline{2, T}, \tag{11}$$

$$(1 - \lambda_k) C_1 X_{kT} - \chi(\sum_{t=0}^{T} C_2 Y_{kt}) \geq 0. \tag{12}$$

Замечание 1. Будем обозначать значение функционала в оптимальном решении задачи: максимизировать $\sum_{t=1}^{T} C_1 X_{kt} e^{-\alpha t}$ при условиях (6),(9), (11), (12) через $\phi_k(\lambda_k)$.

Лемма 1. Если $\chi(C_2 Y_{k0}) \leq b_{k0}$, то $\phi_k(\lambda_k)$ есть невозрастающая функция параметра $\lambda_k \in (0, 1]$..

Теорема 1. Пусть $b_{k0} \geq \chi(C_2 Y_{k0})$. Тогда существует отрезок $[\beta_1, \beta_2] \in (0, 1]$, такой, что $\Phi_k(\lambda_k)$ достигает максимума, если $\lambda_k \in [\beta_1, \beta_2]$.

Дихотомия, "золотое сечение".

Замечание 1. Будем обозначать значение функционала в оптимальном решении задачи: максимизировать $\sum_{t=1}^{T} C_1 X_{kt} e^{-\alpha t}$ при условиях (6),(9), (11), (12) через $\phi_k(\lambda_k)$.

Лемма 1. Если $\chi(C_2 Y_{k0}) \leq b_{k0}$, то $\phi_k(\lambda_k)$ есть невозрастающая функция параметра $\lambda_k \in (0, 1]$..

Теорема 1. Пусть $b_{k0} \geq \chi(C_2 Y_{k0})$. Тогда существует отрезок $[\beta_1, \beta_2] \in (0, 1]$, такой, что $\Phi_k(\lambda_k)$ достигает максимума, если $\lambda_k \in [\beta_1, \beta_2]$.

Дихотомия, "золотое сечение".

Замечание 1. Будем обозначать значение функционала в оптимальном решении задачи: максимизировать $\sum_{t=1}^{T} C_1 X_{kt} e^{-\alpha t}$ при условиях (6),(9), (11), (12) через $\phi_k(\lambda_k)$.

Лемма 1. Если $\chi(C_2 Y_{k0}) \leq b_{k0}$, то $\phi_k(\lambda_k)$ есть невозрастающая функция параметра $\lambda_k \in (0, 1]$..

Теорема 1. Пусть $b_{k0} \geq \chi(C_2 Y_{k0})$. Тогда существует отрезок $[\beta_1, \beta_2] \in (0, 1]$, такой, что $\Phi_k(\lambda_k)$ достигает максимума, если $\lambda_k \in [\beta_1, \beta_2]$.

Дихотомия, "золотое сечение".

Задача управления

Максимизируются налоговые сборы:

$$F(\chi) = \chi \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{\tau=0}^{t} C_2 Y_{k\tau} \right) e^{-\alpha t} \to \max_{\chi}!, \tag{13}$$

где векторы $Y_{k\tau}$ из оптимальных решений задач инвесторов:(1),(2),(5), (7), (8).

Замечание 2. Ставка налога определяется величиной прибыли $100\rho(M_{kt})\%$. Ставка измеряется в десятых долях процента.

Поскольку данная задача является задачей двухуровневого программирования, она NP - трудная, но учитывая замечание 2 для ее решения достаточно решить не более 999 $\bar{\mathcal{K}}$ задач инвесторов, где $\bar{\mathcal{K}} = |\mathcal{K}|$.

Задача управления

Максимизируются налоговые сборы:

$$F(\chi) = \chi \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{\tau=0}^{t} C_2 Y_{k\tau}\right) e^{-\alpha t} \to \max_{\chi}!, \qquad (13)$$

где векторы $Y_{k\tau}$ из оптимальных решений задач инвесторов:(1),(2),(5), (7), (8).

Замечание 2. Ставка налога определяется величиной прибыли $100\rho(M_{kt})\%$. Ставка измеряется в десятых долях процента.

Поскольку данная задача является задачей двухуровневого программирования, она NP - трудная, но учитывая замечание 2 для ее решения достаточно решить не более 999 $\bar{\mathcal{K}}$ задач инвесторов, где $\bar{\mathcal{K}} = |\mathcal{K}|$.

Задача управления

Максимизируются налоговые сборы:

$$F(\chi) = \chi \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} (\sum_{\tau=0}^{t} C_2 Y_{k\tau}) e^{-\alpha t} \to \max_{\chi}!, \qquad (13)$$

где векторы $Y_{k\tau}$ из оптимальных решений задач инвесторов:(1),(2),(5), (7), (8).

Замечание 2. Ставка налога определяется величиной прибыли $100\rho(M_{kt})\%$. Ставка измеряется в десятых долях процента.

Поскольку данная задача является задачей двухуровневого программирования, она NP - трудная, но учитывая замечание 2 для ее решения достаточно решить не более 999 $\bar{\mathcal{K}}$ задач инвесторов, где $\bar{\mathcal{K}} = |\mathcal{K}|$.

Один инвестор

$$F_1(\chi) = \chi\psi_1(\chi) = \chi \sum_{t=1}^{T}(\sum_{\tau=0}^{t} C_2 Y_{1\tau})e^{-\alpha t} \to \max_{\chi}!$$

Замечание 3. Предполагается, что функция $\psi_1(\chi)$ является невозрастающей от $\chi \in [0,1]$.

Лемма 2. Если задача математического программирования (1),(2),(5), (7), (8) имеет решение и справедливо замечание 3, то существует отрезок $[\gamma_1, \gamma_2] \in [0,1]$, такой, что $F_1(\chi)$ достигает максимума, если $\chi \in [\gamma_1, \gamma_2]$.

Один инвестор

$$F_1(\chi) = \chi\psi_1(\chi) = \chi \sum_{t=1}^{T} (\sum_{\tau=0}^{t} C_2 Y_{1\tau}) e^{-\alpha t} \to \max_{\chi}!$$

Замечание 3. Предполагается, что функция $\psi_1(\chi)$ является невозрастающей от $\chi \in [0,1]$.

Лемма 2. Если задача математического программирования (1),(2),(5), (7), (8) имеет решение и справедливо замечание 3, то существует отрезок $[\gamma_1, \gamma_2] \in [0,1]$, такой, что $F_1(\chi)$ достигает максимума, если $\chi \in [\gamma_1, \gamma_2]$.

Один инвестор

$$F_1(\chi) = \chi\psi_1(\chi) = \chi\sum_{t=1}^{T}(\sum_{\tau=0}^{t} C_2 Y_{1\tau})e^{-\alpha t} \to \max_{\chi}!$$

Замечание 3. Предполагается, что функция $\psi_1(\chi)$ является невозрастающей от $\chi \in [0,1]$.

Лемма 2. Если задача математического программирования (1),(2),(5), (7), (8) имеет решение и справедливо замечание 3, то существует отрезок $[\gamma_1,\gamma_2] \in [0,1]$, такой, что $F_1(\chi)$ достигает максимума, если $\chi \in [\gamma_1,\gamma_2]$.

Общий случай

Пусть $\mathcal{L}(\chi)$ – множество инвесторов таких, которые будут функционировать при ставке налога χ. Тогда

$$F(\chi) = \chi \sum_{k \in \mathcal{L}(\chi)} \psi_k(\chi) \to \max_{\chi}!$$

Если замечание 3 справедливо для всех $k \in \mathcal{L}(\chi)$, то функция $\sum_{k \in \mathcal{L}(\chi)} \psi_k(\chi)$ является невозрастающей от $\chi \in [0, 1]$.

Теорема 2. Если задачи инвесторов имеют решения и замечание 3 справедливо для всех $k \in \mathcal{L}(\chi)$, то существует отрезок $[\delta_1, \delta_2] \in [0, 1]$, такой, что $F(\chi)$ достигает максимума, если $\chi \in [\delta_1, \delta_2]$.

Дихотомия, "золотое сечение" , либо строго меньше 999.

Общий случай

Пусть $\mathcal{L}(\chi)$ – множество инвесторов таких, которые будут функционировать при ставке налога χ. Тогда

$$F(\chi) = \chi \sum_{k \in \mathcal{L}(\chi)} \psi_k(\chi) \to \max_{\chi}!$$

Если замечание 3 справедливо для всех $k \in \mathcal{L}(\chi)$, то функция $\sum_{k \in \mathcal{L}(\chi)} \psi_k(\chi)$ является невозрастающей от $\chi \in [0, 1]$.

Теорема 2. Если задачи инвесторов имеют решения и замечание 3 справедливо для всех $k \in \mathcal{L}(\chi)$, то существует отрезок $[\delta_1, \delta_2] \in [0, 1]$, такой, что $F(\chi)$ достигает максимума, если $\chi \in [\delta_1, \delta_2]$.

Дихотомия, "золотое сечение" , либо строго меньше 999.

Общий случай

Пусть $\mathcal{L}(\chi)$ – множество инвесторов таких, которые будут функционировать при ставке налога χ. Тогда

$$F(\chi) = \chi \sum_{k \in \mathcal{L}(\chi)} \psi_k(\chi) \to \max_{\chi}!$$

Если замечание 3 справедливо для всех $k \in \mathcal{L}(\chi)$, то функция $\sum_{k \in \mathcal{L}(\chi)} \psi_k(\chi)$ является невозрастающей от $\chi \in [0, 1]$.

Теорема 2. Если задачи инвесторов имеют решения и замечание 3 справедливо для всех $k \in \mathcal{L}(\chi)$, то существует отрезок $[\delta_1, \delta_2] \in [0, 1]$, такой, что $F(\chi)$ достигает максимума, если $\chi \in [\delta_1, \delta_2]$.

Дихотомия, "золотое сечение" , либо строго меньше 999.

Как и ранее $\varphi(x)$ – налоговые сборы при доходе x.

Аналитическая формула

$$\varphi(x) = \max\{\varphi^i(x), i = \overline{1,p}\},$$

где

$$\varphi^1(x) = \chi_1 x + R_1,\ 0 \le x < r_1,$$

$$\varphi^2(x) = \chi_2 x + R_2,\ r_1 \le x < r_2, \dots,$$

$$\varphi^i(x) = \chi_i x + R_i(r_1, \dots, r_{i-1}, \chi_1, \dots, \chi_i),\ r_{i-1} \le x < r_i.$$

Здесь $R_1 = 0$, а для $i > 1$ справедливы рекуррентные соотношения: $R_{i+1} = R_i - r_i(\chi_{i+1} - \chi_i)$.

Предполагается, что $0 \le \chi_1 \le \chi_2 \le \ldots \le \chi_p < 1$.

Как и ранее $\varphi(x)$ – налоговые сборы при доходе x.

Аналитическая формула

$$\varphi(x) = \max\{\varphi^i(x), i = \overline{1,p}\},$$

где

$$\varphi^1(x) = \chi_1 x + R_1,\ 0 \le x < r_1,$$

$$\varphi^2(x) = \chi_2 x + R_2,\ r_1 \le x < r_2, \dots,$$

$$\varphi^i(x) = \chi_i x + R_i(r_1, \dots, r_{i-1}, \chi_1, \dots, \chi_i),\ r_{i-1} \le x < r_i.$$

Здесь $R_1 = 0$, а для $i > 1$ справедливы рекуррентные соотношения: $R_{i+1} = R_i - r_i(\chi_{i+1} - \chi_i)$.

Предполагается, что $0 \le \chi_1 \le \chi_2 \le \ldots \le \chi_p < 1$.

Задача инвестора: частный случай

$$\varphi(C_2 Y_{k0}) = \chi_1 C_2 Y_{k0}, \quad \varphi(\sum_{\tau=0}^{T} C_2 Y_{k\tau}) = \chi_2 \sum_{\tau=0}^{T} C_2 Y_{k\tau}.$$

Тогда существует момент времени ω такой, что

$$\varphi(\sum_{\tau=0}^{\omega-1} C_2 Y_{k\tau}) = \chi_1 \sum_{\tau=0}^{\omega-1} C_2 Y_{k\tau},$$

$$\varphi(\sum_{\tau=0}^{\omega} C_2 Y_{k\tau}) = \chi_2 \sum_{\tau=0}^{\omega} C_2 Y_{k\tau}.$$

Задача инвестора: частный случай

Эвристический алгоритм, автор М.А. Ицкович

I. Пусть известна величина ω.
Полагаем $T=\omega$, решаем задачу оптимизации плоской шкалы налогообложения: (1),(2),(5),(7)-(9), находим величины λ и χ_1, равную оптимальному значению χ в этой задаче, и векторы X_{kt}, Y_{kt}.

Полагаем $Y^*_{k0}=\sum\limits_{\tau=0}^{\omega} C_2 Y_{k\tau}$, $b^*_{k0}=(1-\lambda)C_1X_{k\omega}-\chi_1 C_2 Y^*_{k0})$. Определяем χ_2, решив задачу оптимизации плоской шкалы налогообложения для $t=\overline{\omega+1,T}$ с новыми начальными условиями.

II. Пусть известна величина r. Момент времени ω можно найти следующим образом.
Решаем задачу оптимизации плоской шкалы налогообложения, полагая

$T^*=T, T-1,\ldots,$ пока не выполнется условие: $\sum\limits_{\tau=0}^{T^*} C_2 Y_{k\tau}\le r$.

Полагаем $\omega=T^*$.

Задача инвестора: частный случай

Эвристический алгоритм, автор М.А. Ицкович

I. Пусть известна величина ω.
Полагаем $T = \omega$, решаем задачу оптимизации плоской шкалы налогообложения: (1),(2),(5),(7)-(9), находим величины λ и χ_1, равную оптимальному значению χ в этой задаче, и векторы X_{kt}, Y_{kt}.
Полагаем $Y^*_{k0} = \sum\limits_{\tau=0}^{\omega} C_2 Y_{k\tau}$, $b^*_{k0} = (1-\lambda)C_1 X_{k\omega} - \chi_1 C_2 Y^*_{k0})$. Определяем χ_2, решив задачу оптимизации плоской шкалы налогообложения для $t = \overline{\omega+1, T}$ с новыми начальными условиями.

II. Пусть известна величина r. Момент времени ω можно найти следующим образом.
Решаем задачу оптимизации плоской шкалы налогообложения, полагая $T^* = T, T-1, \ldots$, пока не выполнется условие: $\sum\limits_{\tau=0}^{T^*} C_2 Y_{k\tau} \leq r$.
Полагаем $\omega = T^*$.

Теорема 3. Пусть для сбора средств в объеме не меньшем заданного требуется установить ставку плоского налога $\chi*$. При введении прогрессивного налогообложения ту же сумму можно получить при установлении ставок, удовлетворяющих неравенствам

$$\chi_2* \geq \chi * .$$

Результат коррелирует с приведенным в [7].

Теорема 3. Пусть для сбора средств в объеме не меньшем заданного требуется установить ставку плоского налога $\chi*$. При введении прогрессивного налогообложения ту же сумму можно получить при установлении ставок, удовлетворяющих неравенствам

$$\chi_2 * \geq \chi * .$$

Результат коррелирует с приведенным в [7].

Рассмотрим задачу следующего вида.
Для всех предприятий $k \in \mathcal{K}$ определить квоты d_{kt} такие, что если векторы продуктов и ресурсов X_{kt}, Y_{kt} являются решением задач предприятий, то достигает максимума

Функционал верхнего уровня – темпы роста экономики

$$Z_1 = \min_{t=\overline{1,T}} \left[\frac{\sum\limits_{k\in\mathcal{K}} g_k(t)}{\sum\limits_{k\in\mathcal{K}} g_k(t-1)} \right]. \qquad (14)$$

Здесь $g_k(t) = \sum\limits_{\tau=1}^{t} [C_{1t}X_{kt} - C_{2t}Y_{kt}]$ – валовая прибыль k предприятия, C_{1t} и C_{2t} – векторы цен на продукты и ресурсы.

Рассмотрим задачу следующего вида.
Для всех предприятий $k \in \mathcal{K}$ определить квоты d_{kt} такие, что если векторы продуктов и ресурсов X_{kt}, Y_{kt} являются решением задач предприятий, то достигает максимума

Функционал верхнего уровня – темпы роста экономики

$$Z_1 = \min_{t=\overline{1,T}} \left[\frac{\sum\limits_{k\in\mathcal{K}} g_k(t)}{\sum\limits_{k\in\mathcal{K}} g_k(t-1)} \right]. \qquad (14)$$

Здесь $g_k(t) = \sum\limits_{\tau=1}^{t} [C_{1t}X_{kt} - C_{2t}Y_{kt}]$ – валовая прибыль k предприятия, C_{1t} и C_{2t} – векторы цен на продукты и ресурсы.

Рассмотрим задачу следующего вида.
Для всех предприятий $k \in \mathcal{K}$ определить квоты d_{kt} такие, что если векторы продуктов и ресурсов X_{kt}, Y_{kt} являются решением задач предприятий, то достигает максимума

Функционал верхнего уровня – темпы роста экономики

$$Z_1 = \min_{t=\overline{1,T}} \left[\frac{\sum\limits_{k\in\mathcal{K}} g_k(t)}{\sum\limits_{k\in\mathcal{K}} g_k(t-1)} \right]. \qquad (14)$$

Здесь $g_k(t) = \sum\limits_{\tau=1}^{t} [C_{1t}X_{kt} - C_{2t}Y_{kt}]$ – валовая прибыль k предприятия, C_{1t} и C_{2t} – векторы цен на продукты и ресурсы.

Замечание 4. Если $\sum\limits_{k\in\mathcal{K}} g_k(t) \geq \sum\limits_{k\in\mathcal{K}} g_k(t-1)$, экономика развивается.

Пусть p^1_{kt} и p^2_{kt} – векторы коэффициентов вредности выпускаемых продуктов и затрачиваемых ресурсов соответственно,

$M_{kt} = C_{1t}X_{kt} - C_{2t}Y_{kt}$ – прибыль предприятия в период T, а $\rho(M_{kt})$ – налоговая ставка.

Замечание 4. Если $\sum\limits_{k \in \mathcal{K}} g_k(t) \geq \sum\limits_{k \in \mathcal{K}} g_k(t-1)$, экономика развивается.

Пусть p^1_{kt} и p^2_{kt} – векторы коэффициентов вредности выпускаемых продуктов и затрачиваемых ресурсов соответственно,

$M_{kt} = C_{1t}X_{kt} - C_{2t}Y_{kt}$ – прибыль предприятия в период T, а $\rho(M_{kt})$ – налоговая ставка.

Замечание 4. Если $\sum_{k \in \mathcal{K}} g_k(t) \geq \sum_{k \in \mathcal{K}} g_k(t-1)$, экономика развивается.

Пусть p^1_{kt} и p^2_{kt} – векторы коэффициентов вредности выпускаемых продуктов и затрачиваемых ресурсов соответственно,

$M_{kt} = C_{1t} X_{kt} - C_{2t} Y_{kt}$ – прибыль предприятия в период T, а $\rho(M_{kt})$ – налоговая ставка.

Без учета самофинансируемости

Задача предприятия

$$A_{kt}X_{kt} - \sum_{\tau=1}^{t} Y_{k\tau} \leq Y_{k0}, \quad t = \overline{1, T}, \tag{15}$$

$$X_{kt} \geq 0, Y_{kt} \geq 0, \quad t = \overline{1, T}, \tag{16}$$

$$\pi_k(t) = p^1_{kt}X_{kt} + p^2_{kt}Y_{kt} \leq d_{kt}, \quad t = \overline{1, T}, \tag{17}$$

$$\phi_k = g_k(T) = \sum_{t=1}^{T} M_{kt} \to \max! \tag{18}$$

Без учета самофинансируемости

Задача предприятия

$$A_{kt}X_{kt} - \sum_{\tau=1}^{t} Y_{k\tau} \leq Y_{k0}, \quad t = \overline{1, T}, \tag{15}$$

$$X_{kt} \geq 0, \, Y_{kt} \geq 0, \quad t = \overline{1, T}, \tag{16}$$

$$\pi_k(t) = p^1_{kt}X_{kt} + p^2_{kt}Y_{kt} \leq d_{kt}, \quad t = \overline{1, T}, \tag{17}$$

$$\phi_k = g_k(T) = \sum_{t=1}^{T} M_{kt} \to \max! \tag{18}$$

Задача управления

выполняются условия

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \pi_k(t) \le (1-\omega) \sum_{k\in\mathcal{K}} \pi_k(t-1), \quad t = \overline{1, T}, \tag{19}$$

$$Z_1 \to \max!, \tag{20}$$

Здесь $\omega \le 0$ – темп снижения загрязнения окружающей среды.

Теорема 4. В случае, когда ω фиксирована для проблемы (15) – (20) требуется решить не более $2\bar{\mathcal{K}}$ задач линейного программирования вида (15) – (18).

Задача управления

выполняются условия

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \pi_k(t) \le (1-\omega) \sum_{k\in\mathcal{K}} \pi_k(t-1), \quad t=\overline{1,T}, \tag{19}$$

$$Z_1 \to \max!, \tag{20}$$

Здесь $\omega \le 0$ – темп снижения загрязнения окружающей среды.

Теорема 4. В случае, когда ω фиксирована для проблемы (15) – (20) требуется решить не более $2\bar{\mathcal{K}}$ задач линейного программирования вида (15) – (18).

Задача управления

выполняются условия

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \pi_k(t) \leq (1-\omega) \sum_{k\in\mathcal{K}} \pi_k(t-1), \quad t = \overline{1, T}, \tag{19}$$

$$Z_1 \to \max!, \tag{20}$$

Здесь $\omega \leq 0$ – темп снижения загрязнения окружающей среды.

Теорема 4. В случае, когда ω фиксирована для проблемы (15) – (20) требуется решить не более $2\bar{\mathcal{K}}$ задач линейного программирования вида (15) – (18).

Учет условий самофинансируемости предприятий

Задача предприятия

К ограничениям (15) –(17) добавляются условия

$$\sum_{\tau=1}^{t} C_{kt}^{1} X_{kt} - \sum_{\tau=1}^{t-1} C_{kt}^{2} Y_{kt} - \rho(M_{kt}) M_{kt} \geq 0, \quad t = \overline{1, T}, \quad (21)$$

Учет условий самофинансируемости предприятий

Задача предприятия

К ограничениям (15) –(17) добавляются условия

$$\sum_{\tau=1}^{t} C^1_{kt} X_{kt} - \sum_{\tau=1}^{t-1} C^2_{kt} Y_{kt} - \rho(M_{kt}) M_{kt} \geq 0, \quad t = \overline{1, T}, \quad (21)$$

Плоский налог на прибыль: задача предприятия

$$A_{kt}X_{kt} - \sum_{\tau=1}^{t} Y_{k\tau} \le Y_{k0}, \quad t = \overline{1, T}, \tag{22}$$

$$X_{kt} \ge 0, \, Y_{kt} \ge 0, \quad t = \overline{1, T}, \tag{23}$$

$$p_{kt}^1 X_{kt} + p_{kt}^2 Y_{kt} \le d_{kt}, \quad t = \overline{1, T}, \tag{24}$$

$$C_{kt}^2 Y_{kt} \le b_{k0} + (1-\chi) \sum_{\tau=1}^{t-1} \left(C_{k\tau}^1 X_{k\tau} - C_{k\tau}^2 Y_{k\tau} \right), t = \overline{1, T}, \tag{25}$$

$$\phi_k \to \max! \tag{26}$$

Задача управления

Выполняются условия

$$\sum_{k\in\mathcal{K}}\sum_{t=1}^{T} d_{kt} \le D, \tag{27}$$

$$0 < \chi \le 1. \tag{28}$$

достигает максимума "уровень справедливости"

$$Z = \min_{k\in\mathcal{K},t=\overline{1,T}}\left[\frac{p^1_{kt}X_{kt}+p^2_{kt}Y_{kt}}{\varphi(M_{kt})}\right] \to \max! \tag{29}$$

Поскольку данная задача является задачей двухуровневого программирования, она заведомо NP - трудная, но учитывая замечание 2 для ее решения достаточно решить не более 999 $\bar{\mathcal{K}}$ задач линейного программирования вида (22) – (26). В [8] построены эвристические алгоритмы нахождения оптимальной ставки пропорционального налога. Очевидно, что существование оптимального решения задачи зависит от выбора D.

Задача предприятия при прогрессивном налоге на прибыль

$$A_{kt}X_{kt} - \sum_{\tau=1}^{t} Y_{k\tau} \leq Y_{k0}, \quad t = \overline{1, T}, \tag{30}$$

$$X_{kt} \geq 0, Y_{kt} \geq 0, \quad t = \overline{1, T}, \tag{31}$$

$$p^1_{kt}X_{kt} + p^2_{kt}Y_{kt} \leq d_{kt}, \quad t = \overline{1, T}, \tag{32}$$

$$C^2_{kt}Y_{kt} \leq b_{k0} + \sum_{\tau=1}^{t-1} M_{k\tau} - \sum_{\tau=1}^{t-1} \varphi(M_{k\tau}), \quad t = \overline{1, T}, \tag{33}$$

$$\phi_k \to \max! \tag{34}$$

Задача управления

Определить векторы *chi* и *d* такие, что если выполняются условия

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} d_{kt} \leq D, \tag{35}$$

$$0 < \chi_1 < \chi_2 < \ldots < 1, \tag{36}$$

достигает максимума "уровень справедливости"

$$Z = \min_{k\in\mathcal{K},t=\overline{1,T}} \left[\frac{p^1_{kt} X_{kt} + p^2_{kt} Y_{kt}}{\varphi(M_{kt})} \right] \to \max! \tag{37}$$

Замечание 5. Будем обозначать значение функционала (34) в оптимальном решении задачи предприятия (30)-(34) при $p = 2, \chi_1 = \alpha, \chi_2 = \beta$ через $\phi(\alpha, \beta)$.

Лемма 3 $\phi_k(\alpha, \beta)$ есть невозрастающая функция одного из параметров при фиксировании другого.

Утверждение 1. Если $\alpha < \beta$, то $Z(\alpha, \chi_2) > Z(\beta, \chi_2)$, за исключением одного случая, когда $Z(\alpha, \chi_2) = Z(\beta, \chi_2)$.

Утверждение 2. Значение функционала Z при увеличении числа ставок увеличивается.

Замечание 5. Будем обозначать значение функционала (34) в оптимальном решении задачи предприятия (30)-(34) при $p = 2, \chi_1 = \alpha, \chi_2 = \beta$ через $\phi(\alpha, \beta)$.

Лемма 3 $\phi_k(\alpha, \beta)$ есть невозрастающая функция одного из параметров при фиксировании другого.

Утверждение 1. Если $\alpha < \beta$, то $Z(\alpha, \chi_2) > Z(\beta, \chi_2)$, за исключением одного случая, когда $Z(\alpha, \chi_2) = Z(\beta, \chi_2)$.

Утверждение 2. Значение функционала Z при увеличении числа ставок увеличивается.

Замечание 5. Будем обозначать значение функционала (34) в оптимальном решении задачи предприятия (30)-(34) при $p = 2, \chi_1 = \alpha, \chi_2 = \beta$ через $\phi(\alpha, \beta)$.

Лемма 3 $\phi_k(\alpha, \beta)$ есть невозрастающая функция одного из параметров при фиксировании другого.

Утверждение 1. Если $\alpha < \beta$, то $Z(\alpha, \chi_2) > Z(\beta, \chi_2)$, за исключением одного случая, когда $Z(\alpha, \chi_2) = Z(\beta, \chi_2)$.

Утверждение 2. Значение функционала Z при увеличении числа ставок увеличивается.

Замечание 5. Будем обозначать значение функционала (34) в оптимальном решении задачи предприятия (30)-(34) при $p = 2, \chi_1 = \alpha, \chi_2 = \beta$ через $\phi(\alpha, \beta)$.

Лемма 3 $\phi_k(\alpha, \beta)$ есть невозрастающая функция одного из параметров при фиксировании другого.

Утверждение 1. Если $\alpha < \beta$, то $Z(\alpha, \chi_2) > Z(\beta, \chi_2)$, за исключением одного случая, когда $Z(\alpha, \chi_2) = Z(\beta, \chi_2)$.

Утверждение 2. Значение функционала Z при увеличении числа ставок увеличивается.

Теорема 5. Пусть для сбора средств в объеме $\mathcal{D}$, необходимого для возмещения ущерба окружающей среде, решение задачи (22)–(29) требует установить ставку плоского налога $\chi*$. При введении прогрессивного налогообложения ту же сумму можно получить при установлении ставок, удовлетворяющих неравенствам

$$\chi_1* \leq \chi_2* \leq \ldots \leq \chi_p* = \chi * .$$

1. *F. Y. Edgeworth* The Pure Theory of Taxation // The Economic Journal, Vol. 7, No. 25. (Mar., 1897), pp. 46-70.
2. *Ramsey F.P.* A Contribution to the Theory of Taxation // Economic Journal, 1927, Vol. 37, No 145, pp. 47-61.
3. *Ramsey F.P.* A Mathematical Theory of Saving // Economic Journal, 1928. Vol. 38, No 152, pp. 543 559.
4. *Hotelling H.* The Economics of Exhaustible Resources // Journal of Political Economy, 1931. Vol. 39, є 2. P. 137-175.
5. *Harold Hotelling* Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Supply and Demand Functions // Journal of Political Economy, 1932. Vol. 40, є 5. P 577-616.
6. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. - М.: Наука, 1984.
7. *Рылова А.А.* О налогообложении фондов в модели Рамсея-Солоу // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14. є 1.
8. *Анцыз С.М., Рыпалова О.А.* О двух схемах налогообложения: дискретные модели - Новосибирск, 2010. - 32 с. - (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; №252).
9. *H. V. Stackelberg* Marktform und Gleichgewicht - Vienna: Springer-Verlag, 1934.