О некоторых свойствах многовершинника

Хохлюк Виталий Иванович
доктор физико-математических наук;
с.н.с Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН;
доцент кафедры математической экономики
Новосибирского государственного университета;
УДК 519.854

Новосибирск, 2017

Основной результат

В настоящем докладе формулируются и доказываются новые свойства многовершинника группового уравнения. В прямом методе дискретной оптимизации, разработанном автором для численного решения целочисленной линейной задачи оптимизации, строятся групповое уравнение и справедливое неравенство, которые позволяют двигаться от одной вершины многовершинника к другой как в симплекс-методе.

Список литературы

1. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М.: Наука, 1982. 288 с.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. 432 с.
3. Хохлюк В.И. Методы дискретной оптимизации: Учеб. пособие. – Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013. Ч. 1. 154 с.
4. Hu T.C. Integer Programming and Network Flows. – Addison-Wesley, 1969. 432 P.

Формулируются определения: алгебраическая операция, группа, порядок группы, порядок элемента группы, циклическая группа, справедливое неравенство.

Постановка задачи

Рассмотрим групповое уравнение (1):

$$\sum_{i=1}^{n} g_{i_j} t_j = h$$

$g_{i_k} \neq g_{i_l}$ при $k \neq l$, для $j = 1, 2, \ldots, n$ выполняются условия $g_{i_j} \in G_d, g_{i_j} \neq g_0, t_j \in \mathbf{Z}_{+}^{\mathbf{1}}, h \in G_d$
где G_d – конечная абелева группа порядка d,
g_0 – ноль этой группы, $\mathbf{Z}_{+}^{\mathbf{1}}$ – множество всех неотрицательных целых чисел.

Постановка задачи

Вывод группового уравнения (1) и его связь с исходной задачей изложены в работе [3].
Рассмотрим пример 1, иллюстрирующий понятие группы.
Алгебраическая операция на множестве $G = \{g_0, g_1, g_2, g_3\}$, состоящем из четырех элементов произвольной природы, задается следующим образом:
$g_i + g_j = g_{(i+j(mod4))}, i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1, 2, 3.$

- Выпуклое множество — множество, в котором все точки отрезка, образуемого двумя любыми точками данного множества, также принадлежат данному множеству.
- Выпуклой оболочкой множества X называется наименьшее выпуклое множество, содержащее X.
- Многовершинником P группового уравнения (1) называется выпуклая оболочка всех неотрицательных целочисленных решений этого уравнения.

Свойства многовершинника группового уравнения

Свойство 1). Многовершинник группового уравнения является либо пустым (уравнение (1) не имеет решений), либо n-мерным.
Приведены примеры 1-мерного, 2-мерного и 3-мерного многовершинников.

Свойства многовершинника группового уравнения

Свойство 2). Многовершинник представляет собой неограниченную выпуклую область, все крайние точки (вершины) которой являются целочисленными. Поэтому в работах по дискретной оптимизации [3,4] многовершинник называется целочисленным многогранником (Polyhedron – многогранник, Polytope – многовершинник).

Свойства многовершинника группового уравнения

Свойство 3). Если неравенство с действительными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j t_j \geq \pi_0$$

является справедливым для многовершинника и если гиперплоскость, соответствующая неравенству, содержит $(n-1)$-мерную грань многовершинника , то
$\pi_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n, \pi_0 > 0.$.

Свойства многовершинника группового уравнения

Свойство 4). Понятие многовершинника вводится для групповой задачи минимизации, для двоичной задачи оптимизации и для целочисленной линейной задачи оптимизации.

Заключение

Изложенные результаты являются теоретической основой для разработки алгоритмов, реализуемых в виде компьютерных программ, способных решать практические задачи большого размера за приемлемое время. Вычислительные усилия направлены на сокращение временного разрыва между решением целочисленной линейной задачи оптимизации и решением соответствующей ей линейной задачи.

Благодарю за внимание!