Robust Duncan–Mortensen–Zakai Equation for Non-stationary Stochastic Systems

K. A. Rybakov,
Moscow Aviation Institute, Moscow

20 September 2017

Optimal filtering problem

Signal observation model is described by the Itô SDEs:

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$
$$dY(t) = c\big(t, X(t)\big)dt + \zeta(t)dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0, \tag{2}$$

where

- $X \in \mathbb{R}^n$ is a state,
- $Y \in \mathbb{R}^m$ is an observation,
- $t \in [t_0, T]$ is a time,
- $f(t, x)\colon [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma(t, x)\colon [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times s}$,
- $c(t, x)\colon [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\zeta(t)\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^{m\times d}$, $|\zeta(t)\zeta^{\mathrm{T}}(t)| \neq 0$,
- $W(t)$ and $V(t)$ are s- and d-dimensional Wiener processes,
- X_0 is an initial state with a probability density $\varphi_0(x)$ ($W(t)$, $V(t)$ and X_0 are independent).

Optimal filtering problem

The optimal filtering problem is to find an estimate $\hat{X}(t)$ given the observations $Y_0^t = \{Y(\tau),\ \tau \in [t_0, t)\}$:

$$\hat{X}(t) = \psi(t, Y_0^t),$$

where the function $\psi(t, Y_0^t)$ satisfies for all $t \in [t_0, T]$ the following condition:

$$\mathbb{E}\big[\big(X(t) - \hat{X}(t)\big)^{\mathrm{T}}\big(X(t) - \hat{X}(t)\big)\big] \to \min_{\psi(t,\,\cdot\,)} .$$

In this case

$$\psi(t, Y_0^t) = \mathbb{E}\big[X(t)|Y_0^t\big] = \int_{\mathbb{R}^n} xp(t, x|Y_0^t)dx,$$

where $\mathbb{E}[\,\cdot\,]$ is the expectation or mean, $p(t, x|Y_0^t)$ is the conditional probability density of the state X.

Equations for conditional probability densities

Duncan–Mortensen–Zakai equation[1]:

$$\frac{\partial\varphi(t,x|Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t,x|Y_0^t) + \mu\left(t,x,\frac{dY(t)}{dt}\right)\varphi(t,x|Y_0^t),$$

$$\varphi(t_0,x) = \varphi_0(x), \quad (3)$$

where $\mathcal{A}$ is the forward diffusion operator:

$$\mathcal{A}\varphi(t,x|Y_0^t) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\big[f_i(t,x)\varphi(t,x|Y_0^t)\big]}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\big[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x|Y_0^t)\big]}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$= -\nabla^{\mathrm{T}}\big(f(t,x)\varphi(t,x|Y_0^t)\big) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big[\nabla\nabla^{\mathrm{T}}\big(g(t,x)\varphi(t,x|Y_0^t)\big)\big],$$

$$g(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^{\mathrm{T}}(t,x),$$

[1] M. Zakai, “On the optimal filtering of diffusion processes,” *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, vol. 11, no. 3, pp. 230–243, 1969.

and the function $\mu(t,x,z)$ is specified by expressions

$$\mu(t,x,z) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} c_k(t,x)q_{kr}(t)\left(z_r - \frac{1}{2}\,c_r(t,x)\right) = c^{\mathrm{T}}(t,x)q(t)\left(z - \frac{1}{2}\,c(t,x)\right),$$

$$q(t) = \eta^{-1}(t), \quad \eta(t) = \zeta(t)\zeta^{\mathrm{T}}(t).$$

The function $\mu(t,x,z)$ is called an absorption and recovering intensity[2] or a potential function[3].

[2] K. A. Rybakov, “Solving approximately an optimal nonlinear filtering problem for stochastic differential systems by statistical modeling,” *Numer. Anal. Appl.*, vol. 6, no. 4, pp. 324–336, 2013.

[3] P. Del Moral, *Feynman–Kac Formulae: Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications*, Springer, 2004.

Optimal estimation

Weight function:

$$\omega(t) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \mu\left(\tau, X(\tau), \frac{dY(\tau)}{d\tau}\right) d\tau\right\}$$

$$= \exp\left\{\int_{t_0}^{t} c^{\mathrm{T}}(\tau, X(\tau)) q(\tau) dY(\tau) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} c^{\mathrm{T}}(\tau, X(\tau)) q(\tau) c(\tau, X(\tau)) d\tau\right\}.$$

So, the estimate $\hat{X}(t)$ is the normalized weighted mean:

$$\hat{X}(t) = \frac{\mathbb{E}\left[\omega(t) X(t)\right]}{\mathbb{E}\left[\omega(t)\right]}.$$

Particle method (particle filter)

Numerical method:

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\omega_{k+1} = \omega_k \exp\Big\{ c^{\mathrm{T}}(t_k, X_k) q(t_k)\big(Y(t_{k+1}) - Y(t_k)\big) - \frac{1}{2}\, c^{\mathrm{T}}(t_k, X_k) q(t_k) c(t_k, X_k) h \Big\}, \quad \omega_0 = 1,$$

where $h = (T - t_0)/N$, $t_k = t_0 + kh$, $\Delta W_k \sim N(0, I_{s\times s})$.

Estimations:

$$\hat{X}(t_k) \approx \hat{X}_k = \frac{1}{\Omega_k} \sum_{i=1}^{M} \omega_k^i X_k^i, \quad \Omega_k = \sum_{i=1}^{M} \omega_k^i.$$

$$\varphi(t_k, x | Y_0^{t_k}) \approx \sum_{i=1}^{M} \omega_k^i \delta(x - X_k^i), \quad p(t_k, x | Y_0^{t_k}) \approx \frac{1}{\Omega_k} \sum_{i=1}^{M} \omega_k^i \delta(x - X_k^i),$$

where $\delta(x - X_k^i)$ is the Dirac delta function concentrated at X_k^i.

Equations for conditional probability densities

Robust Duncan–Mortensen–Zakai equation[4,5]:

$$\frac{\partial \rho(t,x|Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{L}\rho(t,x|Y_0^t) - \sum_{k=1}^{m} Y_k(t)\mathcal{L}_k\rho(t,x|Y_0^t)$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} Y_k(t)Y_r(t)\mathcal{L}_{kr}\rho(t,x|Y_0^t) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial h_k(t,x)}{\partial t}\, Y_k(t)\rho(t,x|Y_0^t),$$

where

$$\mathcal{L}\varphi(t,x|Y_0^t) = \mathcal{A}\varphi(t,x|Y_0^t) - \frac{1}{2}\, c^{\mathrm{T}}(t,x)q(t)c(t,x)\varphi(t,x|Y_0^t),$$

---

[4] J. S. Baras, G. L. Blankenship, S. K. Mitter, "Nonlinear filtering of diffusion processes," in *Proc. of the 8th IFAC Congr.*, Kyoto, 1981, id 23.1.

[5] X. Luo, S. S.-T. Yau, "Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 58, no. 10, pp. 2563–2578, 2013.

Equations for conditional probability densities

and $\mathcal{L}_k = [\mathcal{H}_k, \mathcal{L}]$, $\mathcal{L}_{kr} = \frac{1}{2}[\mathcal{H}_k, \mathcal{L}_r] = \frac{1}{2}[\mathcal{H}_k, [\mathcal{H}_r, \mathcal{L}]]$, $\mathcal{H}_k$ are the multiplication operators with multipliers $h_k(t,x)$:

$$h_k(t,x) = \sum_{r=1}^{m} q_{kr}(t) c_r(t,x), \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Conditional probability densities:

$$\rho(t,x|Y_0^t) = \exp\underbrace{\left\{ -\sum_{k=1}^{m} h_k(t,x) Y_k(t) \right\}}_{-h^{\mathrm{T}}(t,x)Y(t)} \varphi(t,x|Y_0^t),$$

$$p(t,x|Y_0^t) = \frac{\varphi(t,x|Y_0^t)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t,x|Y_0^t)dx}, \quad t \in [t_0, T].$$

Equations for conditional probability densities

Robust Duncan–Mortensen–Zakai equation:

$$\frac{\partial \rho(t,x|Y_0^t)}{\partial t} = \widetilde{\mathcal{A}}\rho(t,x|Y_0^t) + \nu\big(t,x,Y(t)\big)\rho(t,x|Y_0^t), \qquad (4)$$

where

$$\widetilde{\mathcal{A}}\rho(t,x|Y_0^t) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\widetilde{f}_i\big(t,x,Y(t)\big)\rho(t,x|Y_0^t)\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[g_{ij}(t,x)\rho(t,x|Y_0^t)\right]$$

$$= -\nabla^{\mathrm{T}}\Big(\widetilde{f}\big(t,x,Y(t)\big)\rho(t,x|Y_0^t)\Big) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\Big[\nabla\nabla^{\mathrm{T}}\Big(g(t,x)\rho(t,x|Y_0^t)\Big)\Big],$$

The initial condition is determinated by $\rho(t_0,x|Y_0^t) = \varphi_0(x)$, since $\exp\{-h^{\mathrm{T}}(t_0,x)Y_0\} = 1$.

Equations for conditional probability densities

and

$$\widetilde{f}_i(t,x,y) = f_i(t,x) - \sum_{k=1}^{m} y_k g_i^k(t,x), \quad g_i^k(t,x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big[g(t,x)\nabla\nabla^{\mathrm{T}} h_k(t,x)\big],$$

$$\nu(t,x,y) = -\sum_{k=1}^{m} y_k\big(f^k(t,x) + h^k(t,x)\big) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} y_k y_r g^{kr}(t,x)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} h_k(t,x)c_k(t,x) - \sum_{k=1}^{m} y_k\,\frac{\partial h_k(t,x)}{\partial t}, \qquad \begin{aligned} f^k(t,x) &= \nabla^{\mathrm{T}} h_k(t,x) f(t,x), \\ g^{kr}(t,x) &= \nabla^{\mathrm{T}} h_k(t,x) g(t,x)\nabla h_r(t,x), \end{aligned}$$

or

$$\widetilde{f}(t,x,y) = f(t,x) - g(t,x)\left[\frac{\partial h(t,x)}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}} y,$$

$$\nu(t,x,y) = -y^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial h(t,x)}{\partial x}\,f(t,x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big[g(t,x)\nabla\nabla^{\mathrm{T}}\big(y^{\mathrm{T}} h(t,x)\big)\big]$$

$$+\frac{1}{2}\,y^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial h(t,x)}{\partial x}\,g(t,x)\left[\frac{\partial h(t,x)}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}} y - \frac{1}{2}\,h^{\mathrm{T}}(t,x)c(t,x) - y^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial h(t,x)}{\partial t}.$$

Optimal estimation

Auxiliary stochastic system is described by the Itô SDE:

$$d\widetilde{X}(t) = \widetilde{f}\big(t, \widetilde{X}(t), Y(t)\big)dt + \sigma\big(t, \widetilde{X}(t)\big)d\widetilde{W}(t), \quad \widetilde{X}(t_0) = X_0, \quad (5)$$

where $t \in [t_0, T]$; $\widetilde{W}(t)$ is an s-dimensional Wiener process ($\widetilde{W}(t)$, $V(t)$ and X_0 are independent).

Corresponding weight function:

$$\widetilde{\omega}(t) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \nu\big(\tau, X(\tau), Y(\tau)\big)d\tau\right\}.$$

Particle method (particle filter)

Numerical method:

$$\widetilde{X}_{k+1} = \widetilde{X}_k + h\widetilde{f}\big(t_k, \widetilde{X}_k, Y(t_k)\big) + \sqrt{h}\sigma(t_k, \widetilde{X}_k)\Delta\widetilde{W}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\widetilde{\omega}_{k+1} = \widetilde{\omega}_k \exp\big\{\nu\big(t_k, \widetilde{X}_k, Y(t_k)\big)h\big\}, \quad \widetilde{\omega}_0 = 1,$$

where $h = (T - t_0)/N$, $t_k = t_0 + kh$, $\Delta\widetilde{W}_k \sim N(0, I_{s\times s})$.
Estimations:

$$\rho(t_k, x|Y_0^{t_k}) \approx \sum_{i=1}^{M} \widetilde{\omega}_k^i \delta(x - \widetilde{X}_k^i).$$

$$\hat{X}(t_k) \approx \hat{X}_k = \frac{1}{\widetilde{\Omega}_k^*} \sum_{i=1}^{M} \widetilde{\omega}_k^{i*} X_k^i, \quad \widetilde{\Omega}_k^* = \sum_{i=1}^{M} \widetilde{\omega}_k^{i*},$$

where $\widetilde{\omega}_k^{i*} = \widetilde{\omega}_k^i \exp\{h^{\mathrm{T}}(t_k, \widetilde{X}_k^i)Y(t_k)\}$, and

$$\varphi(t_k, x|Y_0^{t_k}) \approx \sum_{i=1}^{M} \widetilde{\omega}_k^{i*} \delta(x - \widetilde{X}_k^i), \quad p(t_k, x|Y_0^{t_k}) \approx \frac{1}{\widetilde{\Omega}_k^*} \sum_{i=1}^{M} \widetilde{\omega}_k^{i*} \delta(x - \widetilde{X}_k^i).$$

Аэродинамическое торможение СА в атмосфере Марса

Плоское продольное движение центра масс спускаемого аппарата на участке аэродинамического торможения в атмосфере Марса описывается системой ОДУ[6]:

$$\dot{V}(t) = -\frac{\sigma_x}{2}\,\rho\big(H(t)\big)V^2(t) - g\sin\theta(t),$$
$$\dot{\theta}(t) = \frac{\sigma_x}{2}\,\rho\big(H(t)\big)V(t)k(t) - \left(\frac{g}{V(t)} - \frac{V(t)}{R+H(t)}\right)\cos\theta(t),$$
$$\dot{H}(t) = V(t)\sin\theta(t),$$

где $V(t)$ — скорость, $\theta(t)$ — угол наклона траектории, $H(t)$ — высота полета.

[6]Пантелеев А. В., Руденко Е. А., Бортаковский А. С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. — М.: Вузовская книга, 2008.

Аэродинамическое торможение СА в атмосфере Марса

Обозначения:

$\sigma_x = 1/150$ м^2/кг — баллистический параметр, $g = 3.72$ м/с^2 — ускорение свободного падения, $R = 3400$ км — радиус планеты, $\rho(H) = \rho_0 \mathrm{e}^{-\beta H}$ — плотность атмосферы с параметрами $\rho_0 = 0.013$ кг/м^3 и $\beta = 0.09$ км$^{-1}$, $k(t) = \frac{2k_b}{\pi}\,\mathrm{arctg}(t - t')$ — коэффициент эффективного аэродинамического качества, который изменяется с помощью программного разворота спускаемого аппарата по крену в момент времени $t' = 45$ с, $k_b = 0.3$ — баллистический коэффициент качества.

Аэродинамическое торможение СА в атмосфере Марса

Автономная измерительная система датчиков перегрузки (акселерометров), установленных на гиростабилизированной платформе, которая ориентирована по местной вертикали[7]:

$$
\begin{aligned}
n_x(t) &= \frac{\sigma_x}{2}\,\rho\big(H(t)\big)V^2(t)\big(\cos\theta(t) - k(t)\sin\theta(t)\big) + \zeta_a N_1(t),\\
n_y(t) &= \frac{\sigma_x}{2}\,\rho\big(H(t)\big)V^2(t)\big(\sin\theta(t) + k(t)\cos\theta(t)\big) + \zeta_a N_2(t),
\end{aligned}
$$

где $N_1(t)$ и $N_2(t)$ — независимые гауссовские белые шумы, аддитивная помеха интенсивности $\zeta_a = 0.01$.

[7] Статистическая динамика и оптимизация управления летательных аппаратов / Под ред. Красильщикова М. Н., Малышева В. В. — М.: Альянс, 2013.

Аэродинамическое торможение СА в атмосфере Марса

Необходимость оценивания траектории вызвана неточными начальными данными входа в атмосферу. Для номинального режима

$$V_0 = V(0) = 6 \text{ м/с}, \quad \theta_0 = \theta(0) = -18^o, \quad H_0 = H(0) = 100 \text{ км},$$

разброс задается среднеквадратическим отклонением:

$$\sigma_V = 15 \text{ м/с}, \quad \sigma_\theta = 1^o, \quad \sigma_H = 7 \text{ км}.$$

Для простоты будем считать величины V_0, θ_0 и H_0 гауссовскими с математическими ожиданиями, определяемыми номинальным режимом, и указанными среднеквадратическими отклонениями, предполагая эти величины независимыми.

Аэродинамическое торможение СА в атмосфере Марса

Связь с общей постановкой задачи оптимальной фильтрации:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ \theta \\ H \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} V_0 \\ \theta_0 \\ H_0 \end{bmatrix} \ (n = 3), \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \ (m = 2).$$

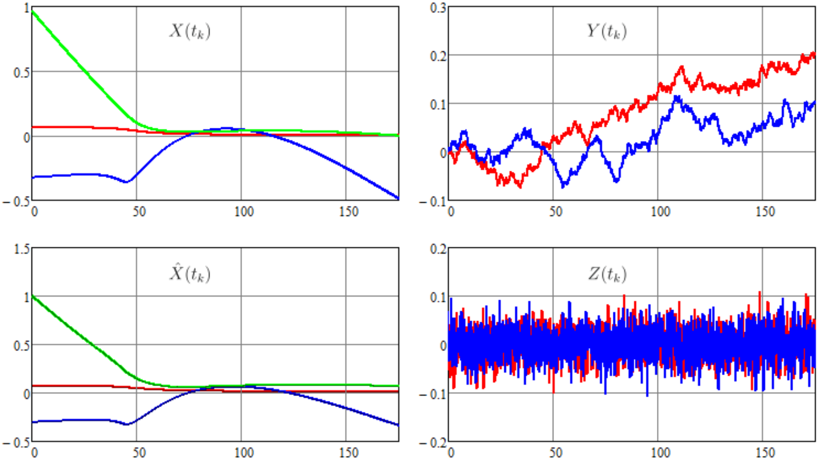
Коэффициенты в уравнении объекта наблюдения:

$$f(t,x) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sigma_x}{2}\,\rho(x_3)x_1^2 - g\sin x_2 \\ \dfrac{\sigma_x}{2}\,\rho(x_3)x_1 k(t) - \left(\dfrac{g}{x_1} - \dfrac{x_1}{R + x_3}\right)\cos x_2 \\ x_1 \sin x_2 \end{bmatrix}, \quad \sigma(t,x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ (s = 1).$$

Коэффициенты в уравнении измерительной системы:

$$c(t,x) = \frac{\sigma_x}{2}\,\rho(x_3)x_1^2 \begin{bmatrix} \cos x_2 - k(t)\sin x_2 \\ \sin x_2 + k(t)\cos x_2 \end{bmatrix}, \quad \zeta(t) = \begin{bmatrix} \zeta_a & 0 \\ 0 & \zeta_a \end{bmatrix} \quad (d = 2).$$

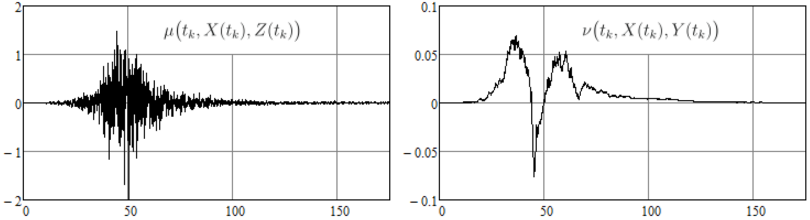
Аэродинамическое торможение СА в атмосфере Марса



Обозначения координат: скорость, угол наклона, высота.

Измерения: проекция 1, проекция 2.

Аэродинамическое торможение СА в атмосфере Марса



Интенсивности измерения весовых коэффициентов при применении методов частиц, слева — на основе уравнения ДМЗ, справа — на основе робастного уравнения ДМЗ.