О сложности задачи выбора инвестиционных проектов

Светлана Малах

Образовательный центр "Перспектива"
Омск

Введение

Актуальна проблема эффективного размещения капитала.

Инвестор ищет наиболее доходные варианты.

Доходные инвестиции связаны с риском.

Для уменьшения риска используется диверсификация вложений.

Маркович предложил измерять риск совместной ковариацией вложений.

Рассматривается двухкритериальная задача максимизации дохода и минимизации риска.

Этой задачей занимались Г. Маркович, Дж. Тобин, У. Шарп, Дж. Линтерн, Е.М. Бронштейн, Я. Чен, Р. Аскин и др.

В данной работе исследуется дискретный вариант задачи.

Постановка задачи выбора инвестиционных проектов

Имеется капитал в объеме $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{n}$ различных инвестиционных проектов. Для реализации проекта $\boldsymbol{i}$ необходимы капиталовложения в размере $\boldsymbol{k_i}$.

Прибыль проекта $\boldsymbol{i}$ является случайной величиной $\boldsymbol{\xi_i}$ с математическим ожиданием $\boldsymbol{m_i}$.

Матрица ковариаций $\boldsymbol{V = \|v_{ij}\|}$, где $\boldsymbol{v_{ij} = M(\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j)}$.

Инвестиционным портфелем называется некоторый набор проектов, выбранных для инвестирования: $\boldsymbol{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, где $\boldsymbol{x_i = 1}$, если проект $\boldsymbol{i}$ реализуется, и $\boldsymbol{x_i = 0}$ – в противном случае.

$\boldsymbol{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i x_i}$ – капитал, который вкладывает инвестор;

$\boldsymbol{m_p = M(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}$ – ожидаемая прибыль инвестиционного портфеля;

$\boldsymbol{V_p = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} v_{ij} x_i x_j}$ – риск портфеля.

Какой портфель необходимо сформировать инвестору?

Модель задачи выбора инвестиционного портфеля

Необходимо найти булевый вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такой что:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}x_ix_j \to min;$$
$$\sum_{i=1}^{n} m_ix_i \to max;$$
$$\sum_{i=1}^{n} k_ix_i \leq K;$$
$$x_i \in \{0,1\}, i = 1, 2, ..., n.$$

Что значит решить двухкритериальную задачу?

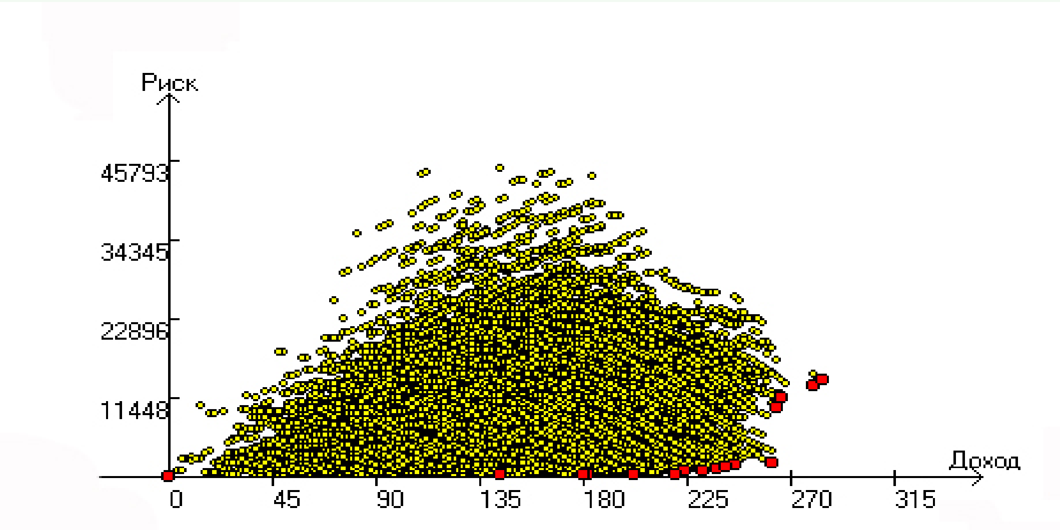
Полное множество альтернатив

Множество допустимых портфелей делится на множество недоминируемых (Парето оптимальное множество) и доминируемых портфелей.

Каждому портфелю $\boldsymbol{x}$ из ПОМ поставим в соответствие пару $(\boldsymbol{m_p}, \boldsymbol{V_p})$. Выбираем по одному представителю $\boldsymbol{x}$ от пары $(\boldsymbol{m_p}, \boldsymbol{V_p})$.

Множество выбранных $\boldsymbol{x}$ образует полное множество альтернатив (ПМА). Решить двухкритериальную задачу значит построить ПМА.

Утверждение. *Мощность ПМА не превосходит* $\boldsymbol{Cn}$, *где* $\boldsymbol{C}$ *– средняя прибыль по проектам.*



Сильная NP-трудность задачи

Теорема. Задача построения оптимального портфеля в следующей постановке

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}x_i x_j \to min;$$
$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \geq m_0;$$
$$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i \leq K;$$
$$x_i \in \{0,1\}, i = 1, 2, ..., n.$$

является NP-трудной в сильном смысле.

К данной задаче сводиться задача о клике.

Теорема. Построение ПМА дискретной двухкритериальной задачи максимизации прибыли и минимизации риска инвестицинного портфеля является NP-трудным в сильном смысле.

Независимые проекты

Пусть случайные величины $\boldsymbol{\xi}_i$ и $\boldsymbol{\xi}_j$ независимы, тогда $\boldsymbol{v_{ij} = 0}$ $(\boldsymbol{i \neq j})$.

Риск портфеля: $\boldsymbol{V_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ii} x_i}$.

Получаем задачу с двумя линейными критериями:

$$\sum_{i=1}^{n} v_{ii} x_i \to min;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \to max;$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i \le K;$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, ..., n.$$

Независимые проекты

Вместо второй целевой функции рассмотрим ограничение и с помощью динамического программирования решаем следующую задачу:

$$\sum_{i=1}^{n} v_{ii} x_i \to min;$$
$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \geq m;$$
$$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i \leq K;$$
$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, ..., n.$$

Утверждение. Задача построение ПМА для случая с независимыми проектами псевдополиномиально разрешима.

Линейно зависимые проекты

Часто доходность инвестиционных проектов зависит от некоторых экономических параметров.

Пусть $\boldsymbol{\xi}$ – случайная величина с математическим ожиданием $\boldsymbol{M\xi}$ и дисперсией $\boldsymbol{D\xi}$.

$\boldsymbol{\xi_i = \alpha_i + \beta_i \xi}$ - прибыль по каждому проекту $\boldsymbol{\xi_i}$ линейно зависит от $\boldsymbol{\xi}$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{D\xi \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j x_i x_j \to min} \\ \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \to max} \\ \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i \le K} \\ \boldsymbol{x_i \in \{0, 1\} \;\; (i = \overline{1, n})} \end{cases} \tag{1}$$

Линейно зависимые проекты

$$\begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_i)^2 \to min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i \to max \\ \sum\limits_{i=1}^{n} k_i x_i \le K \\ x_i \in \{0,1\} \;\; (i = \overline{1,n}), \end{cases} \tag{2}$$

Ограничив $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ из целевой функции риска нижней $B_1 = \sum\limits_{i:\beta_i<0} \beta_i$ и верхней $B_2 = \sum\limits_{i:\beta_i>0} \beta_i$ оценками, получим задачу, которая также может быть решена методом динамического программирования.

Утверждение. Задача построения ПМА для случая с линейно зависимыми проектами псевдополиномиально разрешима.

Заключение

Перспективы в исследовании: рассмотреть задачу формирования инвестиционного портфеля

- **с учетом длительности выполнения проектов;**
- **в динамике;**
- **с потоком платежей по проектам.**

Спасибо за внимание!