О ПРИНЦИПЕ ПАРЕТО ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

С. М. Анцыз[1,2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
[2]*Новосибирский государственный университет*

Предлагается новый подход к моделированию экономического роста сложных, социально-экономических систем. Подход базируется на принципе: достичь наилучшего результата с наименьшими усилиями, называемого принципом Парето. Приведены примеры дискретной и непрерывной моделей, построенных с использованием предложенного подхода. Проведен сравнительный анализ дискретной модели возмещения ущерба окружающей среде, построенной ранее, и дискретной модели, в которой использовался новый подход.

Ключевые слова: принцип Парето, минимизация ущерба окружающей среде, задачи двухуровневого программирования, двухуровневые задачи оптимального управления, налогообложение.

Введение

Односекторная модель экономического роста сложной социально-экономической системы (модель Рамсея-Солоу [1,2]) базируется на предположении, что объем валового внутреннего продукта $F(K,L)$ является функцией от всего объема фондов K и общего числа занятых L. В 1897 году Вильфредо Парето было обнаружено, что в Италии 20% домохозяйств получают 80% доходов. В дальнейшем это открытие называли по-разному, в том числе принципом Парето, законом Парето, правилом 80/20, принципом наименьшего усилия. Последний термин принадлежит Джорджу Ципфу (Зирфу), который сформулировал утверждение, что в социальных системах примерно 20-30% ресурсов (люди, товары, время, знания или любые другие) дают 70-80% результатов [3]. Название принцип (закон) Парето предложил американский инженер Иосиф Мозес Юран в работе [4]. Учесть принцип Парето при моделировании сложных социально-экономических систем можно, если задачи на максимум соответствующего функционала при заданных ограничениях на использование ресурсов заменить задачами на минимум ресурсов при заданном (желательном) значении функционала. Приведем два примера такой модификации.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 16-06-00049) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-06-00101, проект № 16-06-00046 и проект № 16-01-00108).

Пример I. В [5] рассматривалась иерархическая система, состоящая из предприятий и государства. Цель исследований – выбор схемы управления, с помощью которой достигается равновесие по Штакельбергу между желаниями: уменьшить ущерб окружающей среде и увеличить темпы роста экономики. Пусть $\varphi_k(t) = \sum_{\tau=1}^{t}[C_{k\tau}^{(1)}X_{k\tau} - C_{k\tau}^{(2)}Y_{k\tau}]$ – валовый доход k-го предприятия за периоды с первого по t. Предприятие с индексом k определяет векторы продуктов и ресурсов X_{kt}, Y_k такие, что достигает максимума его интегральный доход $\varphi_k(T)$ при ресурсных ограничениях и ограничениях на ущерб окружающей среде:

$$A_{kt}X_{kt} - \sum_{\tau=1}^{t} Y_{k\tau} \le Y_{k0}, \qquad t = 1,\ldots,T, \tag{1}$$

$$X_{kt} \ge 0, \quad Y_{kt} \ge 0, \qquad t = 1,\ldots,T, \tag{2}$$

$$g_{kt}(X_{kt}, Y_{kt}) = p_{1kt}X_{kt} + p_{2kt}Y_{kt} \le d_{kt}, \quad t = 1,\ldots,T. \tag{3}$$

Здесь p_{1kt} и p_{2kt} – векторы коэффициентов, характеризующих ущерб от выпуска продуктов и затрат ресурсов соответственно. Матрица A_{kt} – матрица коэффициентов использования ресурсов k-м предприятием для производства единицы продукта в период времени t, вектор Y_{k0} – запасы ресурсов у k-го предприятия в начальный момент времени, вектор $C_{kt} = (C_{kt}^{(1)}, C_{kt}^{(2)})$ состоит из векторов цен на продукты и ресурсы соответственно для в период времени t.

Заметим, что компоненты векторов C_{kt}, соответствующие одному и тому же продукту или ресурсу для различных k предполагаются равными.

Матрицы A_{kt}, векторы $C_{kt}^{(1)}$, $C_{kt}^{(2)}$ и Y_{k0} предполагаются заданными.

Государство определяет для всех предприятий квоты d_{kt} такие, что если векторы X_{kt} и Y_{kt} являются решениями задач предприятий, то достигает максимума темп роста экономики Z. Он находится как минимум по периодам отношения суммы по всем предприятиям величин $\varphi_k(t)$ к сумме величин $\varphi_k(t-1)$:

$$Z = \min_{t=1,T} \frac{\sum_{k=1}^{K} \varphi_k(t)}{\sum_{k=1}^{K} \varphi_k(t-1)}, \tag{4}$$

где K – число предприятий в системе.

Управление максимизирует темп роста экономики Z при условии, что суммы по всем предприятиям величин d_{kt} не превосходят заданных ограничений D_t.

В [5, стр. 15-17] выявлены условия, при которых задача (1) – (4) разрешима и предложен алгоритм поиска допустимого решения.

С использованием принципа Парето предлагается построить новую модель рассматриваемой иерархической системы.

Известны значения компонент векторов X_{k0} и Y_{k0} и величина ущерба окружающей среде D_0. Государство задает величину z темпа роста экономики и значения величин d_{kt}:

$$d_{kt} = g_{k0}(X_{k0}, Y_{k0}) \frac{D_0(1-\rho)^t}{\sum_{k=1}^{K} g_{k0}(X_{k0}, Y_{k0})}, \tag{5}$$

где ρ – темп снижения ущерба окружающей среде.

Предприятия решают задачи минимизации затрат ресурсов за весь рассматриваемый период:

$$\sum_{t=1}^{T} Y_{kt} \to \min_{X,Y}! \tag{6}$$

при ресурсных ограничениях (1,2), экологических ограничениях (3) и ограничении:

$$\varphi_k(T) \geq z^{(T-1)} \varphi_k(1). \tag{7}$$

Возникает задача двухуровневого программирования, решается она итерациями по ρ и z.. Модель, в которой возникает задача (1) – (3),(7),(6) является дискретной. Далее рассмотрим пример постановки непрерывной модели.

Пример II. Начиная с 2002 года, группой учеников автора (студентами, аспирантами и кандидатами наук) изучается проблема поиска рациональной стратегии функционирования иерархической системы государство – инвесторы. Аппаратом для исследований являются различные модификации модели Рамсея-Солоу (смотри, например, [6] – [8]). Инструментами управления иерархической системы являются схемы налогообложения, различающиеся налогооблагаемыми базами (валовый доход, прибыль, имущество и т.п.), схемами налогов (пропорциональный, прогрессивный) и величинами налоговых ставок. Рассмотрим базовую для всех модификаций модель с одним инвестором (модель государство – предприятие).

Будем в дальнейшем называть объем валового продукта предприятия $\mathrm{Y} = F(K, L)$ доходом. Предполагается, что базой налогообложения является весь доход, величина ставки пропорционального налога равна χ, производственная функция $F(K, L)$ – гладкая, однородная первой степени и удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \quad K, L > 0.$$

При заданной государством ставке налога $0 \le \chi < 1$ в каждый момент времени доход $\mathrm{Y}(t)$ делится на налог $N(t) = \chi \mathrm{Y}(t)$, потребление $C(t)$ и инвестиции (капиталовложения) $I(t)$:

$$\begin{gathered} \mathrm{Y}(t) = N(t) + C(t) + I(t), \\ N(t) = \chi \mathrm{Y}(t), \quad C(t) = (1-\chi)(1-s(t))\mathrm{Y}(t), \\ C(t) = (1-\chi)s(t))\mathrm{Y}(t), \quad 0 \le s(t) \le 1. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $s(t)$ (искомое управление) − доля дохода, которая идет на инвестиции. Производственные фонды амортизируют с темпом $\mu > 0$, то есть за единицу времени из строя выбывает μ-я часть имеющихся основных фондов. Если предположить, что весь налог изымается из производственной сферы, то выполняется уравнение

$$\dot{K}(t) = (1-\chi)s(t))F(K(T), L) - \mu K(t), \tag{9}$$

которое показывает, как изменяется величина капитала. В качестве критерия деятельности инвестора, подлежащего максимизации в плановом периоде $[0, T]$, принимается общее удельное потребление (на одного работника) с дисконтированием:

$$\int_0^T \frac{C(t)}{L} e^{-\delta t} dt, \tag{10}$$

где $\delta > 0-$ константа дисконтирования. Для того чтобы существовал задел на будущее налагается также условие

$$\frac{K(T)}{L} \geq k_T > 0, \tag{11}$$

которое интерпретируется как условие «экономического горизонта»: планирование накопления и потребление должно обеспечить определенный экономический потенциал за пределами рассматриваемого периода.

Задача государства заключается в выборе значения ставки налогообложения χ, которое максимизирует функционал

$$\int_0^T N(t) e^{-\delta t} dt, \tag{12}$$

при условии, что доля дохода $s(t)$ определяется в результате решения задачи инвестора (8) –(11).

В [6] изучена модификация базовой задачи дополнительным условием, что доля λ налоговых сборов, возвращается государством инвестору. Показано, что в рациональной стратегии государства должно выполняться условие $\lambda \geq s(t)$ и выявлены условия, при которых существует оптимальная величина ставки налогообложения.

С использованием принципа Парето предлагается построить новую непрерывную модель роста рассматриваемой иерархической системы.

Обозначим $\mathrm{K}(\chi) = \int_0^T K(t) dt$ величину, характеризующую затрату ресурсов, которая определяется при решении задачи (8) –(11) при заданной величине налоговой ставки χ.

Легко показать, что функция $\mathrm{K}(\chi)$ является убывающей функцией параметра χ. Следовательно для того, чтобы уменьшить затрату усилий для получения заданной величины налоговых сборов, необходимо найти наименьшее значение параметра χ, при котором достигается заданная величина налогов.

Предполагая известной значение **Ф** желательной величины налоговых сборов можно предложить следующий алгоритм (модель) получения ее с минимальной затратой усилий.

Заметим, что налоговые ставки задаются в процентах, причем не более одного знака после запятой.

Шаг 1.0. Полагаем Δ равным 0,1, $\bar{\chi}=1{,}01, \chi=\bar{\chi}-0{,}1$.

Шаг 1.1. Решаем задачу (8) –(11) и проверяем условие

$$\int_0^T N(t)e^{-\delta t}dt \geq \Phi. \tag{13}$$

Шаг 1.2. Если (13) выполнено переходим на *Ш*аг 1.3, в противном случае полагаем $\chi=\chi+\Delta$. Если $\chi=1$ переходим на *Конец* 1, если $\chi=\bar{\chi}$ переходим на *Конец*, иначе на *Шаг* 1.1.

Шаг 1.3. Полагаем $\bar{\chi}=\chi, \quad \chi=\bar{\chi}-0{,}1,$ Δ равным 0,01. Переходим на *Шаг* 1.1.

Конец 1. Величина **Ф** слишком велика, поэтому в модели отсутствуют допустимые решения.

Конец. Величина ставки χ соответствует получению желаемого результата с минимальной затратой усилий.

Для того, чтобы решить новую задачу (трудоемкость приведенного алгоритма) необходимо решить не более 110 задач (8) –(11).

Алгоритм решения дискретной задачи минимизации ущерба окружающей среде

Выше было упомянуто, что для задачи (1) –(4) удалось разработать алгоритм нахождения допустимого решения. Для новой дискретной задачи из раздела 1 можно построить алгоритм получения оптимального решения.

Напомним, что предполагаются известными значения компонент векторов X_{k0} и Y_{k0}, значения компонент векторов цен $C_{k0}=(C_{k0}^{(1)},C_{k0}^{(2)})$ и величина ущерба окружающей среде D_0. Известны также величины $\varphi_k(0)=C_{k0}^{(1)}X_{k0}-C_{k0}^{(2)}Y_{k0}$.

Государство задает величину z темпа роста экономики и величину ρ темпа снижения ущерба окружающей среде. Определяются величины $D_t=D_0(1-\rho)^t$.

Необходимо определить d_{kt} такие, что если векторы X_{kt} и Y_{kt} являются решением задач линейного программирования: (1), (2), (3),

$$\varphi_k(T)\ge z^T\varphi_k(0), \tag{7'}$$

$$\sum_{t=1}^{T}Y_{kt}\to\min_{X,Y}! \tag{6}$$

выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{K}d_{kt}=D_t,\quad t=1,\ldots,T,\qquad Z=\min_{t=\overline{1,T}}\frac{\sum_{k=1}^{K}\varphi_k(t)}{\sum_{k=1}^{K}\varphi_k(t-1)}>z.$$

Решение этой задачи можно получить следующим алгоритмом.

1. Для всех $k=\overline{1,K}$ решаются задачи линейного программирования (Задача1):

(1),(2),(7’),(6).

Решением задачи k будет пара векторов $X_{kt}(1)$, $Y_{kt}(1)$.

2. Если для данного k решение Задачи1 будет не единственным, то выбирается то решение, при котором ущерб окружающей среде будет минимальным.

Для этого решаются задача линейного программирования

$$(1),(2),(7'),$$

$$\sum_{t=1}^{T} Y_{kt} \le \sum_{t=1}^{T} Y_{kt}(1),$$

$$\sum_{t=1}^{T} g_{kt}(X_{kt}, Y_{kt}) \to \min_{X,Y}!$$

Получается пара векторов $X_{kt}(2)$, $Y_{kt}(2)$. В случае, когда решение для данного k единственно в качестве $X_{kt}(2)$, $Y_{kt}(2)$ полагаются $X_{kt}(1)$, $Y_{kt}(1)$.

3. Величины d_{kt} определяются по формулам

$$d_{kt} = g_{kt}(X_{kt}(2), Y_{kt}(2)) \frac{D_0(1-\rho)^t}{\sum_{k=1}^{K} g_{kt}(X_{kt}(2), Y_{kt}(2))}.$$

Лемма 1 и Лемма 2 из [5] дают обоснование этого алгоритма.

Отметим, что итерациями по z и по ρ можно получить решение задач оптимизации темпов роста экономики и темпов снижения ущерба окружающей среде. При этом для выполнения одного шага итерации нужно решить не более $2K$ задач линейного программирования.

Заключение

В настоящей работе исследовались различные постановки двухуровневых задач, возникающих в моделях сложных социально-экономических систем. Предложен новый подход к для моделирования экономического роста таких систем. Подход базируется на принципе: достичь наилучшего результата с наименьшими усилиями, называемого принципом Парето. Приведены примеры дискретной и непрерывной моделей, построенных с использованием предложенного подхода. Для дискретной задачи возмещения ущерба окружающей среде, построенной с помощью нового подхода разработан алгоритм нахождения оптимального решения, чего не удавалось выполнить для задачи, построенной ранее.

Список литературы

1. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.
2. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – 3-е стереотип. изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
3. Zipf G.K. Human behavior and the principle of least effort. – Cambridge: Addison-Wesley Publishing, 1949.
4. Juran J.M. Quality Control Handbook. – New-York: McGraw-Hill, 1951.
5. Анцыз С.М., Высоцкая Т.В. Двухуровневые модели оптимизации экологического налогообложения – Новосибирск, 2006. – 34 с. – (Препринт. РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 166).
6. Трубачева А.Е. Об оптимальности ставки единого пропорционального налога в двухуровневой экономической системе // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. Т. 12. № 4. – С. 137–151.
7. Трубачева А.Е. Об особом оптимальном режиме управления при возмущении функции производства // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2011. Т. 11, вып. 2. – С. 105–118.
8. Рылова А.А. О налогообложении фондов в модели Рамсея–Солоу // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2014. Т. 14, вып. 1. – С. 84–97.

Сергей Матвеевич Анцыз – с.н.с., к.т.н., н.с. Института математики им.С. Л. Соболева СО РАН;
630090, Новосибирск; e-mail: antzys@math.nsc.ru