

ФОРМАЛИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ ЗАДАЧ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

О. А. Ляхов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

УДК 519.854.2:658.512.6

Рассмотрены неточности в записи условий математических моделей календарного планирования. Показана на трех примерах возможность улучшения решений при уточнении исходных условий задач, при более четком отображении закономерностей свойств отображаемых объектов.

Ключевые слова: сетевое планирование, PERT, календарное планирование, нескладываемые ресурсы, цикл управления проектом, Задача коммивояжера, Гамильтонов цикл.

Введение. В практике применения математических моделей в календарном планировании возникают погрешности, связанные с несоответствием математических моделей исходной постановке задач. Здесь рассмотрены на трех моделях неточности в модельном описании объектов в известных задачах маршрутизации и управления сложными комплексами работ, приводящие к ошибкам в расписаниях работ и учете ресурсов при составлении планов.

В первом примере описаны систематические ошибки системы PERT, занижающие циклы выполнения комплексов работ относительно их реальных значений. Во втором примере рассмотрены погрешности моделей календарного планирования проектов при агрегировании ресурсов и времени. В третьем примере показана неточность постановки задачи коммивояжера относительно большей части исходных проблем, приводящая к увеличению длины маршрута.

1. Ошибки PERT. Сетевое планирование от момента зарождения в виде PERT-TIME и CPM до сложных систем PRIMAVERA, MICROSOFT [1,2] широко использовалось в СССР и за рубежом в проектно-конструкторских и научно-исследовательских организациях, в строительстве, в технической подготовке производства, в единичном производстве. Единая терминология была закреплена в стандартах [3]. Далее в состав систем СПУ (сетевого планирования и управления) были включены условия учета ресурсов [4], особенности технологических процессов и взаимосвязи работ [5], вероятностные характеристики процессов [6], выбор направлений продолжения работ, и т.д. В настоящее время сетевое планирование является частью нескольких научных дисциплин: постановки задач и практическое применение рассматриваются в научных дисциплинах "управление проектами"; в разделе исследования операций "календарное планирование" изучаются математические аспекты сетевых методов. Вслед за международными в сентябре 2012 года введены российские стандарты [7-9], определяющие основные понятия управления проектами, по степени детализации, явно уступающие стандартам 60-70-х годов прошлого века. Выполнение проектов в сетевом планировании отображается в виде работ (операций) и их взаимосвязей. В основном варианте системы сетевого планирования и управления (СПУ) принято работы обозначать дугами, события - вершинами, а весь процесс выполнения проекта отображать ориентированным графом (сетевой моделью).

Основные правила расчета параметров в системе PERT, разработанные более пол века назад, не изменились до сих пор и содержатся в большей части современной и научной литературы. Предполагается, что продолжительности всех работ, - случайные величины. Все работы независимы. Известны математические ожидания продолжительностей работ. Ранние сроки свершения событий рассчитываются по максимуму из математических ожиданий завершения всех непосредственно предшествующих данному событию работ. Критический путь (ранний срок выполнения всего комплекса работ) рассчитывается как математическое ожидание длины критического пути, т.е. суммы математических ожиданий продолжительностей работ пути. В соответствии с законом больших чисел длина критического пути – случайная нормально распределенная величина.

В [6] было показано, что расчет основных параметров расписания работ по методике PERT содержит систематическую ошибку. В PERT предполагается, что все работы независимы, число работ в путях от начала до конца проекта достаточно большое и поэтому длительность критического (самого длинного) пути является математическим ожиданием суммы продолжительностей операций и имеет нормальный закон распределения. Расчет сводится к последовательному просмотру сетевой модели и определению ранних сроков свершения событий. Эти оценки предлагается использовать как средние сроки наступления событий в календарном планировании. Ошибочным в PERT является предположение о том, что наибольший по средним оценкам продолжительности путь является критическим. При этом не учитывается возможность существования путей, более длинных путей, чем критический. Фактически в PERT-TIME рассчитывается продолжительность проектов при условии, что самый длинный путь, рассчитанный по средним оценкам, является самым длинным в сетевой модели. Ошибочным является также предположение о нормальном распределении продолжительности проектов: из независимости работ не следует независимости ранних сроков свершения событий, в том числе и завершающего события, определяющего длительность проекта в целом.

Методика PERT получила широкое распространение в управлении сложными комплексами работ, вошла в учебники управлению проектами, несмотря на систематическую ошибку, уменьшающую значения ранних сроков наступления событий относительно их реальных значений. Проверка методики PERT-TIME методом статистических испытаний на сетевых моделях, взятых из практики управления, показала занижение оценок выполнения проектов на 25-30 процентов [6].

2. Ошибки агрегирования ресурсов и времени. Рассматривается задача календарного планирования проекта, целью решения которой является построение расписания работ, минимизирующего несбалансированность нескладируемых ресурсов во времени. В целях доведения времени решения задач до приемлемых значений в практическом использовании укрупняются ресурсные группы и (или) интервалы шкалы времени планового периода. Показано, что это ведет к ошибкам учета ресурсов.

Каждому календарному плану (расписанию) соответствует распределение ресурсов во времени. Плановый период содержит несколько временных интервалов (квантов) для измерения затрат ресурсов. Сумма длин квантов равна плановому периоду. Потребности в ресурсах календарных планов рассчитываются на квант в целом. Уменьшение числа квантов и (или) ресурсных групп (агрегирование) сокращает размерность моделей, но при этом теряется точность расчетов. Крайний случай (плановый период из одного кванта) превраща-

ет календарную задачу в объемную. Увеличение количества квантов приводит к росту размера моделей, что увеличивает трудоемкость плановых расчетов.

Вопрос о степени детализации информации связывается с организацией информационной базы предприятий и на практике обычно решается в пользу укрупнения данных для сокращения объема документооборота. При этом не принимается во внимание рост ошибок агрегирования. Несоответствие плана факту выявляется позднее в оперативном управлении и может быть объяснено многими причинами: вероятностной природой объекта, творческим характером работ, недобросовестностью исполнителей и т.д., тогда как план может быть изначально невыполнимым.

Ниже показано, что вследствие агрегирования решения сетевых задач содержат систематические ошибки, только уменьшающие реальный дисбаланс производственных возможностей, в результате чего календарные планы выглядят "лучше", чем в действительности. Предложена количественная оценка ошибок агрегирования. Выводы иллюстрированы компьютерными экспериментами на реальных данных.

2.1. Примеры ошибок агрегирования.

Пример 1. В табл. 1 приведено расписание трех операций, использующих один и тот же ресурс по одной единице в каждый момент времени.

Таблица 1 – Начальное расписание работ

Номер операции	Начало операции	Конец операции	Продолжительность операции
1	0	2	2
2	1	3	2
3	1	4	3

Максимальное потребление ограничено в каждый момент времени двумя единицами ресурса.

Для длины кванта 1 потребность в ресурсе в интервале $[1, 2]$ равна 3, что больше, чем имеется в наличии. То же самое расписание, оцененное по ресурсу в квантах длиной 2 единицы времени становится выполнимым. Аналогично можно показать, что агрегирование ресурсов (объединение ресурсов в укрупненные группы) искажает оценку выполнимости расписания.

Таблица 2 – Уменьшение дисбаланса ресурса при сдвиге работ при агрегировании

Номер кванта	Имеющийся ресурс	Потребность в ресурсах		Дисбаланс	
		До сдвига	После сдвига	До сдвига	После сдвига
Детализированная модель					
1	2	0	0	0	0
2	2	2	4	0	2
3	2	2	0	0	0
4	2	4	4	2	2
Агрегированная модель					
1	4	2	4	0	0
2	4	6	4	2	0

Пример 2. Процесс составления расписаний заключается в сдвигах операций по оси времени, их растяжениях и сжатиях (изменениях интенсивности), сохраняющих порядок выполнения работ сетевой модели и улучшающих значение критериальной функции.

Во втором примере в качестве критерия выбрана минимизация дисбаланса ресурсов, измеряемого как превышение потребностей в ресурсах над их наличием по всем квантам.

Пусть в каждый единичный интервал времени имеется 2 единицы ресурса и некоторая операция, выполняемая со 2-го по 3-й моменты времени с постоянной интенсивностью 2 в единицу времени. Начальные потребности в ресурсах, их наличие и дисбаланс приведены в табл. 2 в двух вариантах: для длины кванта 1 и 2. Там же в последних двух столбцах приведены потребности и дисбаланс ресурсов после сдвига операции на одну единицу влево по оси времени. Сдвиг операции привел к полной сбалансированности при ее оценке в квантах длины 2 с одновременным увеличением дисбаланса с 2 до 4 единиц для длины кванта 1.

Пример 3 (табл. 3), показывающий обратный эффект, когда сдвиг работы, улучшающий сбалансированность в детализированных данных, сопровождается ростом критериальной функции при ее расчете по укрупненным промежуткам времени.

Так же как и в предыдущем примере некоторая операция с интенсивностью 2, включенная в расписание со 2-го по 3-й моменты времени, сдвигается влево на 1. В результате дисбаланс, оцененный в единичных квантах, снизился с 2 до 1 с одновременным его увеличением с 0 до 1 в первом кванте двойной длины.

Таблица 3 – Увеличение дисбаланса ресурса при сдвиге работ при агрегировании

Номер кванта	Имеющийся ресурс	Потребность в ресурсах		Дисбаланс	
		До сдвига	После сдвига	До сдвига	После сдвига
Детализированная модель					
1	2	3	3	1	1
2	2	0	2	0	0
3	2	3	1	1	0
4	2	1	2	0	0
Агрегированная модель					
1	4	3	5	0	1
2	4	4	3	0	0

2.2. Величина ошибок потребностей в ресурсах при агрегировании. Пусть при длине кванта, равной $k \cdot d (k > 1)$ построено агрегированное расписание. Обеспеченность одним ресурсом в одном кванте: $\Delta_{kd} = \max((kv - kR), 0)$, где kv – потребность в ресурсе в одном кванте; kR – наличие ресурса в кванте; Δ_{kd} показывает дефицит ресурса в кванте.

Дефицит этого же ресурса в этом же промежутке времени (kd) рассчитывается как сумма дефицитов по k квантам при длине кванта d :

$$\Delta d = \sum_{i=1}^k \max((v_i - R), 0) \text{ при условиях: } \sum_{i=1}^k v_i = kv, \quad v_i \geq 0 \quad i = \overline{1, k};$$

где v_i – потребность в ресурсе в кванте i при длине d .

Относительно исходного расписания значения v_i неизвестны. Ошибка учета ресурса в кванте при его длине $k \cdot d$ относительно длины кванта d составляет: $m_{kd} = \Delta_d - \Delta_{k \cdot d}$.

Несложно показать, что:

$$\max m_{kd} = \begin{cases} R(k-1), & \text{если } v > R \\ kv - R, & \text{если } v \leq R \text{ и } kv > R \\ 0, & \text{если } v \leq \frac{R}{k} \end{cases}$$

1. Погрешность оценки дефицита ресурса в одном кванте при агрегировании может достигать $|k(v - R)|$.

2. Агрегирование порождает систематические ошибки оценки ресурсных возможностей, только уменьшающие реальный дисбаланс производственных возможностей по каждому ресурсу по каждому кванту (поскольку $m_{kd} \geq 0$).

3. Для того, чтобы бездефицитное расписание при длине кванта $k \cdot d (k > 1)$ гарантированно оставалось бездефицитным при длине кванта d , расход ресурсов в одном кванте не должен превышать $1/k$ от их наличия.

2.3. *Экспериментальная проверка ошибок агрегирования в сетевых моделях.* В практике сетевого планирования наиболее распространены две постановки: на минимум несбалансированности ресурсов при заданных датах выполнения проектов и минимизация отклонений расчетных сроков реализации от директивных дат при соблюдении ограничений по ресурсам.

В первой задаче обычно используется целевая функция, минимизирующая суммарное превышение потребности в ресурсах над их наличием во времени. Оптимальное решение этой задачи при агрегировании содержит систематическую ошибку в оценке ресурсообеспеченности. Во второй задаче недопустимое по срокам расписание, оцененное по агрегированным данным может оказаться допустимым. Как результат агрегирования решение обеих задач выглядит лучше, чем в действительности. Ниже рассмотрены результаты экспериментов по первой задаче.

Оценим ошибку целевой функции при укрупнении промежутков учета ресурсов. Рассмотрим последовательность задач с разным числом квантов T . При $T=1$ модель превращается в объемную. С ростом T увеличивается точность расчетов при росте размерности. Обозначим $F_k(x)$ - дисбаланс расписания x в k -квантовой модели.

Для любого расписания x выполняется $F_k(x) \geq F_q(x)$ при $k > q$ (с увеличением числа интервалов выявляется больший дисбаланс ресурсов).

Обозначим x_q^* оптимальное расписание для q -интервальной модели. Тогда $F_q(x_q^*) \geq F_{q-1}(x_{q-1}^*)$, т.е. решение для $q-1$ -интервальной модели определяет нижнюю границу критерия q -интервальной модели, и, наоборот, дисбаланс q -интервальной модели в точке оптимума является верхней границей для критериальных функций с числом квантов меньше q .

Ошибка агрегирования может быть оценена по следующей формуле:

$$D_{qk} = F_k(x) - F_q(x) \text{ при } k > q.$$

D_{qk} показывает "незамеченное" на k -интервальной модели превышение потребности в ресурсах над их наличием во времени, которое "становится видимым" при доведении числа интервалов до q . Аналогично может быть построена оценка ошибки агрегирования оптимальных планов:

$$D_{qk}^* = F_k(x_k^*) - F_q(x_q^*) \text{ при } k > q.$$

Для экспериментов выбраны реальные данные по проектной организации. Более подробное описание входных данных приведено в [10]. Для четырех проектов, отобранных в годовой план, при семи ограниченных ресурсах (исполнителях разных специальностей) по модели (5–10) построено расписание в двух вариантах: для месячных ($k = 12$) и полумесячных ($q = 24$) интервалов учета. Алгоритм описан в [11]. Получено оптимальное решение. Те же данные в 24-х интервальной модели не позволили избежать дефицита ресурсов.

3. Задача коммивояжера. Задача формулируется следующим образом: требуется найти наиболее короткий маршрут путешественника (бродячего торговца, транспортного средства и т.д.), которому нужно посетить $n - 1$ город по одному разу каждый и вернуться в исходный пункт. В теории графов задача сводится к поиску гамильтонова контура минимальной длины. Она также может быть поставлена как комбинаторная или как задача целочисленного программирования (см., например, [14], т.2, с. 252-254).

Задача коммивояжера широко используется в различных сферах человеческой деятельности от календарного планирования до проектирования сложных технических систем. Наиболее известные практические проблемы, сводящиеся к задаче коммивояжера, - задача о переналадках, задача о коммуникациях, задача составления расписаний транспортных средств, - не полностью соответствуют их математической формулировке.

Условие однократного посещения каждого пункта (условие "однократности") является излишним по отношению к большей части исходных ситуаций. Так, в [15, т.1, с.162] требуется определить маршрут минимальной длины школьного автобуса, подвозящего на занятия учеников из различных районов города. Однако если выгоднее посетить один из пунктов дважды, то этому ничего не препятствует кроме условия однократности, которому трудно найти объяснение, исходя из словесных описаний проблемы доставки учеников на занятия.

Пример из [14, т.2, с.275]. Имеется 5 пунктов, куда нужно доставить учеников. Расстояния между пунктами заданы матрицей A .

$$A = \begin{bmatrix} \infty & 10 & 25 & 25 & 10 \\ 1 & \infty & 10 & 15 & 2 \\ 8 & 9 & \infty & 20 & 10 \\ 14 & 10 & 24 & \infty & 15 \\ 10 & 8 & 25 & 27 & \infty \end{bmatrix}$$

Минимальное расстояние при однократном посещении пунктов равно 62 (маршрут $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$). При возможности повторного посещения вершин учеников можно

доставить более коротким маршрутом: значение критерия – 59 (маршрут 1→5→2→3→4→2→1).

Иногда условие однократности приводит к очевидным противоречиям здравому смыслу. Так в [16] рассмотрена задача минимизации облучения ремонтного персонала при его передвижении по аварийным участкам АЭС. Лучше посетить некоторые пункты по несколько раз, если это способствует понижению облучения работников при их передвижении по зараженным участкам. Для численного примера из практики, приведенного в [16], уровень облучения ремонтного персонала может быть понижен [17], если разрешено неоднократное посещение вершин.

Заключение.

1. PERT. Ошибки в расчете математического ожидания ранних сроков свершения событий и критического пути в системе PERT, уменьшающие расчетные параметры относительно их реальных значений, выявляются в оперативном управлении проектами. Практика планирования их “не замечает” вследствие неполного учета факторов в методе PERT: не учитывается ограниченность ресурсов, возможность изменения параметров работ в ходе выполнения проектов, и т.д. Несоответствие фактических параметров плановым вызывает необходимость частой корректировки расписания работ, тогда как построенный план мог быть изначально невыполнимым.

2. Агрегирование в задачах календарного планирования. Обычно число интервалов и ресурсных групп (степень агрегирования) в сетевых моделях управления производством выбирается исходя из требований практики. Стремление к получению прикладных результатов для трудно разрешимых календарных задач заставляет сокращать размерность моделей. В результате допустимые решения могут стать невыполнимыми.

Ошибки агрегирования систематические: они выравнивают потребности в ресурсах и занижают временные параметры. Как результат, возникают погрешности в планировании, которые “не замечают” модели. Проблема агрегирования - одна из нерешенных в экономической теории, привлекает внимание многих исследователей. В частности, аналогичные результаты для макроэкономических моделей получены в [12, 13].

Машинные эксперименты показали, что ошибки достаточно велики чтобы их игнорировать в практических расчетах. Более того, отмечены ситуации, когда улучшение сбалансированности агрегированных планов одновременно ухудшает детализированные расписания, т.е. оптимизация по укрупненным данным приводит к результату, противоположному к задуманному.

3. Задача коммивояжера. Как правило, верификация выявляет неучтенные факторы при модельном описании практических задач. Здесь, наоборот, - слишком сильные ограничения математической модели не всегда позволяют получить эффективные решения.

Удаление условия “однократности” в математической модели задачи коммивояжера не противоречит большей части известных практических проблем, но способствует улучшению “оптимального” решения в задачах с невыполненным условием неравенства треугольника.

Список литературы

1. <http://www.oracle.com/primavera/index.html>.
2. <http://www.microsoftproject.ru/>.

3. Основные положения по разработке и применению систем сетевого планирования и управления. (Межотраслевые инструктивно-методические материалы.) Изд. 2-е, переработ. и доп. М., "Экономика", 1967. 84 с.
4. Зуховицкий С. И., Радчик И. А., Математические методы сетевого планирования, М., 1965.
5. Ахьюджа Х. Сетевые методы управления в проектировании и производстве. - М.: Мир, 1979.
6. Голенко Д.И. Статистические методы сетевого планирования и управления, М., Наука, 1968.
7. ГОСТ Р 54869-2011. Проектный менеджмент. Требования к управлению проектом, М., Стандартинформ, 2011.
8. ГОСТ 54870-2011. Проектный менеджмент. Требования к управлению портфелем проектов, М., Стандартинформ, 2011.
9. ГОСТ 54870-2011. Проектный менеджмент. Требования к управлению программой, М., Стандартинформ, 2011.
10. Ляхов О.А. Согласование в двухуровневых моделях управления сложными комплексами работ. - Новосибирск, 1998, - 26с. - (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние ИВМ и МГ, - 1114).
11. Ляхов О.А. Свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ № 2011618359 «Программный комплекс сетевого планирования проектов» («ПКСПП») – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, 2011.
12. Зоркальцев В.И. Проблемы агрегирования в экономике: есть ли логическая совместимость микроэкономики и макроэкономики? - Иркутск: Препринт ИСЭМ СО РАН, 1997.
13. Зоркальцев В.И. Агрегирование экономических субъектов. - Иркутск: Препринт ИСЭМ СО РАН, 2000.
14. Вагнер Г. Основы исследования операций. - М.: Мир, 1973.
15. Исследование операций. /Под. ред. Моудера Д., Элмаграби С. - М.: Мир, 1981.
16. Ташлыков О.Л., Сесекин А.Н., Гончар А.А., Щеклеин С.Е. Об алгоритмизации задачи оценки дозовых нагрузок при планировании ремонтного обслуживания АЭС //Сборник трудов седьмой научно-практической конференции, посвященной 40-летию работы Белоярской АЭС. Том 3.: - Заречный, 2004. С. 161-166.
17. Ляхов О. А. Задача минимизации доз облучения при техническом обслуживании АЭС // Проблемы информатики, 2016, № 1. С.19-25

*Олег Алексеевич Ляхов - канд. экон. наук, науч. сотр. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
630090, Новосибирск; e-mail: loa@rav.sccc.ru*