

Задача выполнения технологически взаимосвязанных работ на параллельных машинах

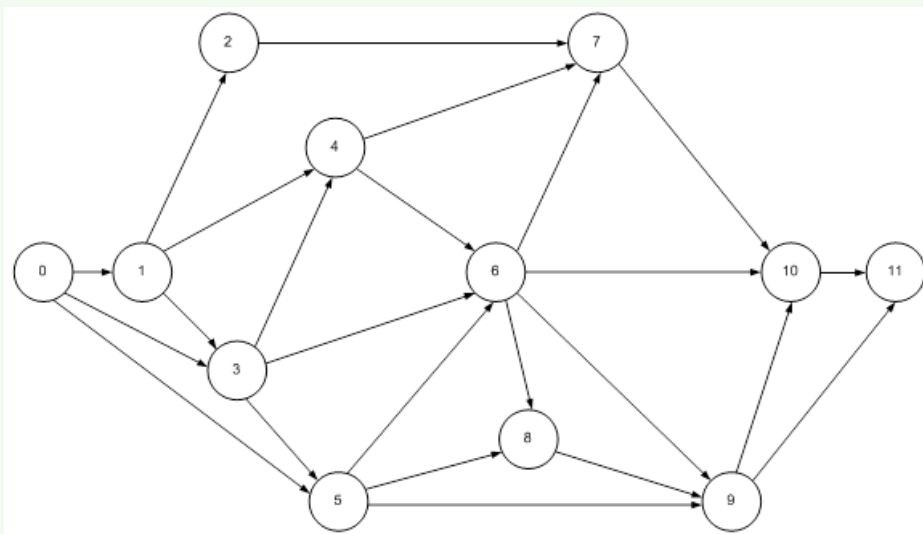
Наталья Герасименко

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
Омский филиал

Введение

На практике часто встречаются задачи связанные с обработкой информации и оптимизацией на частично упорядоченных множествах.

Такое множество может быть представлено ориентированным графом без контуров.



Вершины это элементы множества, дуги – отношения порядка.

Интерпретация задачи

Из курса исследования операций хорошо известна задача сетевого планирования, в которой необходимо за минимальное время выполнить некоторое множество технологически взаимосвязанных работ.

Взаимосвязь задается частичным порядком. Минимальное время завершения всех работ находится методом динамического программирования за линейное от числа работ время. Но в этой задаче не учитываются ограничения на ресурсы.

Если ресурсы, требуемые для выполнения работ, ограничены, то задача становится NP-трудной в сильном смысле.

Задача NP-трудна в сильном смысле даже при единичных длительностях работ и единичных объемах потребления ресурсов.

Такую постановку можно интерпретировать как выполнения работ единичной длительности на параллельных машинах.

Она обозначается в литературе как $P|prec, p_j = 1|C_{max}$.

Обзор

Сильная NP-трудность задачи $P|prec, p_j = 1|C_{max}$ доказана в работе *Ulman J.D. NP-complete scheduling problems. J.Comput. And Syst.Sci., 1975. - V. 10, N. 3 - P. 384-393.*

Особый интерес представляет случай, когда число машин ограничено.

Задача $P2|prec, p_j = 1|C_{max}$ полиномиально разрешима.

Но если длительности работ равны 1 или 2, то задача $P2|prec, p_j \in \{1, 2\}|C_{max}$ уже NP-трудна в сильном смысле.

Goffman E.G., Graham R.L. Optimal scheduling for two processor systems. Acta Informal. 1972. - 1(3) - P. 200-213.

Вопрос о вычислительной сложности задачи с тремя машинами $P3|prec, p_j = 1|C_{max}$ остается открытым.

Задача распознавания

Сформулируем задачу $P3|prec, p_j = 1|C_{\max}$ как задачу распознавания.

На трех параллельных машинах требуется выполнить n работ единичной длительности, причем $|n| = 3k$ для некоторого числа k .

На множестве работ задано отношение предшествования.

Существует ли расписание выполнения работ длины k , при условии сохранения отношения предшествования?

Заметим, что если существует расписание длины k , то в каждый момент времени выполняются три независимые работы.

Таким образом, все работы разбиваются на тройки.

Рассмотрим похожие по структуре задачи, связанные с выбором троек.

Задачи разбиения на тройки

Задача разбиения на треугольники.

Задан граф $\Gamma = (V, U)$, число вершин которого $|V|$ делится на три, то есть $|V| = 3p$ для некоторого числа p . Существует ли такое разбиение V на p непересекающихся подмножеств $V_1, V_2, \dots, V_p$ (содержащих по 3 элемента), что для каждого $V_i = \{v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}\}$ три ребра $\{v_{i1}, v_{i2}\}$, $\{v_{i1}, v_{i3}\}$ и $\{v_{i2}, v_{i3}\}$ принадлежат U ?

Задача точного покрытия трехэлементными множествами.

Задано конечное множество X , такое, что $|X| = 3q$, и семейство C трехэлементных подмножеств множества X . Верно ли, что семейство C содержит точное покрытие множества X , то есть такое подсемейство $C' \subseteq C$, что каждый элемент из X содержится ровно в одном элементе из C' ?

Отображение

Введем следующее отображение множества всех частичных порядков в множество неориентированных графов.

Частичный порядок будем задавать графом $G = (V, E)$, где V – множество вершин, а E – множество дуг. Причем G не содержит контуров.

Сопоставим частичному порядку неориентированный граф $\Gamma = (V, U)$, по следующему правилу.

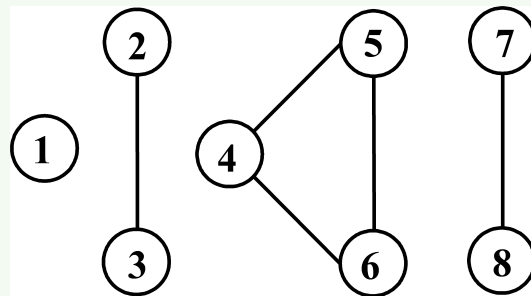
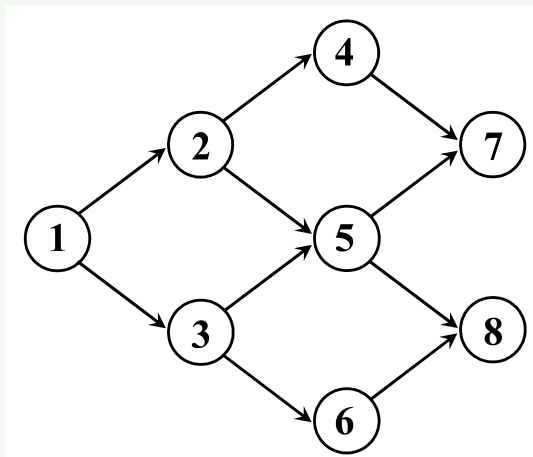
Множества вершин G и Γ совпадают.

Если в G вершины i и j зависимы (существует путь из одной вершины в другую), то ребро $(i, j) \notin U$.

Если вершины i и j в G независимы, то включаем ребро (i, j) в U .

То есть, $(i, j) \in U$ тогда, и только тогда, когда (i, j) независимы в частичном порядке G .

Пример отображения



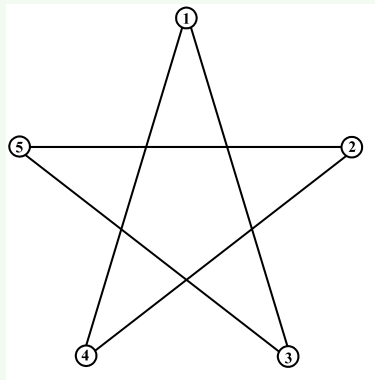
Утверждение 1. Если для графа $G = (V, E)$ существует решение задачи $P3|G, p_j = 1|C_{max}$ со значением целевой функции $C_{max} = k$, то в графе Γ существует разбиение на треугольники.

Будет ли взаимнооднозначность?

Каждому частичному порядку G сопоставим граф Γ . Тогда множеству всех частичных порядков соответствует некоторое множество неориентированных графов.

Очень важным является вопрос, совпадает ли оно с множеством всех неориентированных графов.

Если это так, то задача $P3|G, p_j = 1|C_{max}$ и задача разбиение на треугольники сводятся между собой. К сожалению, это не так.



Утверждение 2. К графу $C5$ не сводится ни один частичный порядок.

Результаты

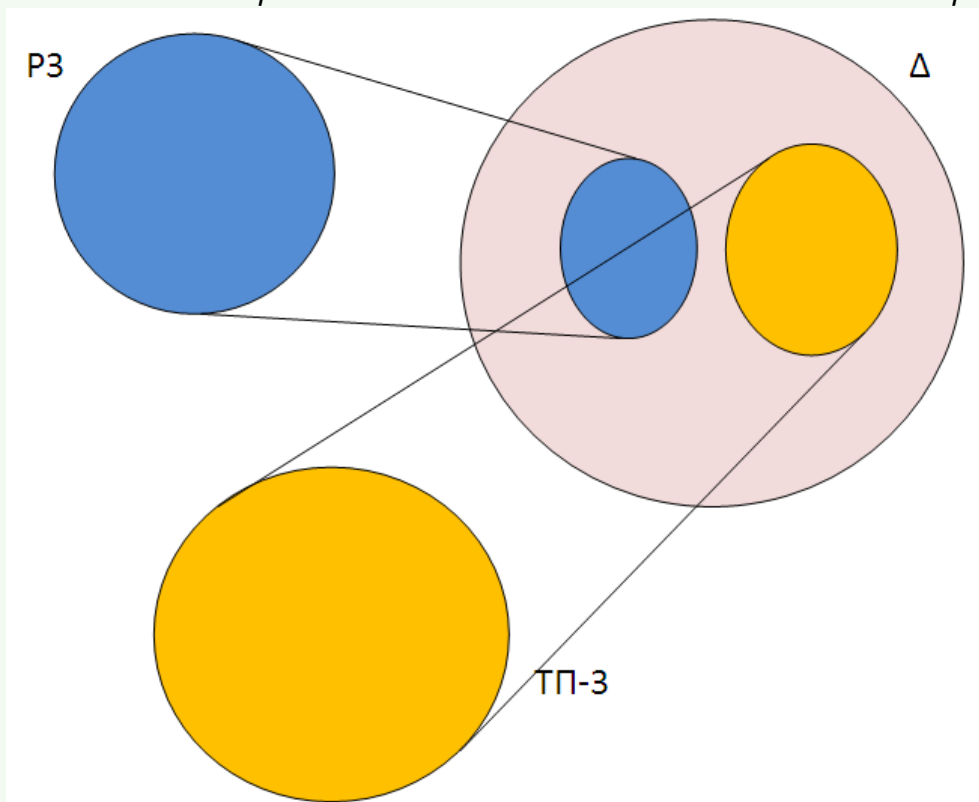
Важный вопрос: Содержит ли образ множества частичных порядков NP-трудную массовую подзадачу Δ ? Если содержит, то PЗ тоже является NP-трудной.

Для ответа на этот вопрос рассмотрим доказательство NP-трудности задачи Δ . Может оказаться, что семейство NP-трудных задач Δ , полученных в результате сведения, пересекается с образом множества частичных порядков. Тогда это влечет NP-трудность нашей задачи.

В данной работе удалось показать, что это не так. Для подграфа, изображенного на рисунке нет соответствующего частичного порядка. Это означает, что подкласс заведомо трудных задач Δ не содержит задачи, к которым сводится частичный порядок.

Результаты

Утверждение 3. *Массовая подзадача, возникающая при сведении покрытия трехэлементными множествами к задаче разбиения на треугольники не пересекается с образом множества всех частичных порядков.*



Заключение

Исследована задача минимизации общего времени выполнения технологически взаимосвязанных работ единичной длительности на трех идентичных параллельных машинах, вычислительная сложность которой неизвестна.

Проведен анализ ее взаимосвязи с близкими по постановке NP-трудными задачами разбиения на треугольники и покрытия трехэлементными множествами.

Показано, что подмножество наиболее сложных задач разбиения на треугольники и образ задачи с тремя машинами не пересекаются между собой.

Спасибо за внимание!