***

О МОДЕЛЯХ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ, УЧИТЫВАЮЩИХ КРЕДИТОВАНИЕ

Анцыз Сергей Матвеевич

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Пятнадцатая международная азиатская школа-семинар "Проблемы оптимизации сложных систем"

27 августа 2019, Академгородок, Новосибирск, Россия

В опубликованной в XIX веке работе Эджворта [1] автор объясняет преимущества прогрессивного налога. Исследуя модификацию модели Рамсея ([2],[3]), в которой изучаются вопросы, связанные с налогообложением фондов, А.А. Рылова в [4], установила, что плоская шкала налогов позволяет государству получить средств больше, чем непрерывный аналог прогрессивного налога. Этот неожиданный результат потребовал проверки с использованием других моделей, желательно, более адекватных экономической практике.

В [4] изучалась иерархическая система, состоящая из управляющего органа и нескольких инвесторов (предприятий). В качестве экономического регулятора на уровне государства используются пропорциональный или прогрессивный налоги на основные фонды предприятий, а на уровне инвесторов регулятором является доля дохода, направляемая на инвестиции. База: модификация модели Рамсея-Солоу, в каждый момент времени в которой доход $Y(t) = F(K(t))$ состоит из налога $N(t)$, потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + N(t).$$

$N(t) = \rho(Y(t))Y(t)$, $C(t) = (1 - \rho(Y(t))(1 - s(t))Y(t)$,
$I(t) = (1 - \rho(Y(t))s(t)Y(t)$, $0 \le s(t) \le 1$, $0 \le \rho(Y(t)) \le 1$,

где $s(t)$ – часть выпуска, которая идет на инвестиции, $\rho(Y(t))$ – ставка налогообложения.

Здесь аргумент производственной функции $Y(t) = F(K(t))$ капитал $K(t)$. Вид функции $\rho(Y(t))$ зависит от формы налогообложения.

Пусть налогом облагаются только фонды: $\rho(Y(t)) = \rho(K(t))$ Вид функции $\rho(K(t))$ зависит от формы налогообложения.

В [4] изучалась иерархическая система, состоящая из управляющего органа и нескольких инвесторов (предприятий). В качестве экономического регулятора на уровне государства используются пропорциональный или прогрессивный налоги на основные фонды предприятий, а на уровне инвесторов регулятором является доля дохода, направляемая на инвестиции. База: модификация модели Рамсея-Солоу, в каждый момент времени в которой доход $Y(t) = F(K(t))$ состоит из налога $N(t)$, потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + N(t).$$

$N(t) = \rho(Y(t))Y(t)$, $C(t) = (1 - \rho(Y(t))(1 - s(t))Y(t)$,
$I(t) = (1 - \rho(Y(t))s(t)Y(t)$, $0 \leq s(t) \leq 1$, $0 \leq \rho(Y(t)) \leq 1$,

где $s(t)$ – часть выпуска, которая идет на инвестиции, $\rho(Y(t))$ – ставка налогообложения.

Здесь аргумент производственной функции $Y(t) = F(K(t))$ капитал $K(t)$. Вид функции $\rho(Y(t))$ зависит от формы налогообложения.

Пусть налогом облагаются только фонды: $\rho(Y(t)) = \rho(K(t))$ Вид функции $\rho(K(t))$ зависит от формы налогообложения.

В [4] изучалась иерархическая система, состоящая из управляющего органа и нескольких инвесторов (предприятий). В качестве экономического регулятора на уровне государства используются пропорциональный или прогрессивный налоги на основные фонды предприятий, а на уровне инвесторов регулятором является доля дохода, направляемая на инвестиции. База: модификация модели Рамсея-Солоу, в каждый момент времени в которой доход $Y(t) = F(K(t))$ состоит из налога $N(t)$, потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + N(t).$$

$N(t) = \rho(Y(t))Y(t)$, $C(t) = (1 - \rho(Y(t))(1 - s(t))Y(t)$,
$I(t) = (1 - \rho(Y(t))s(t)Y(t)$, $0 \leq s(t) \leq 1$, $0 \leq \rho(Y(t)) \leq 1$,

где $s(t)$ – часть выпуска, которая идет на инвестиции, $\rho(Y(t))$ – ставка налогообложения.

Здесь аргумент производственной функции $Y(t) = F(K(t))$ капитал $K(t)$. Вид функции $\rho(Y(t))$ зависит от формы налогообложения.

Пусть налогом облагаются только фонды: $\rho(Y(t)) = \rho(K(t))$ Вид функции $\rho(K(t))$ зависит от формы налогообложения.

Новые переменные: $k = K/L$ – фондовооруженность и удельное потреблению, новая функция $f(k) = F(K/L)$ удовлетворяет неоклассическим условиям, (L – труд). Производственные фонды амортизируют с темпом μ и пусть ν — годовой темп изменения числа занятых.

Задача инвестора (предприятия)

Для заданной функции $\rho(k)$ нужно максимизировать функционал

$$\int_0^T (1 - s(t))(f(k(t)) - \rho(k)k(t))e^{-\delta t} dt \to \max_{s(t)} \quad (1)$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = (f(k(t)) - \rho(k)k(t))s(t) - \lambda k(t), \quad \lambda = (\mu + \nu), \quad (2)$$

$$0 \le s(t) \le 1, \quad (3)$$

$$k(0) = k_0, \quad k(T) \ge k_T > 0. \quad (4)$$

Здесь δ – коэффициент дисконтирования.

Новые переменные: $k = K/L$ – фондовооруженность и удельное потреблению, новая функция $f(k) = F(K/L)$ удовлетворяет неоклассическим условиям, (L – труд). Производственные фонды амортизируют с темпом μ и пусть ν — годовой темп изменения числа занятых.

Задача инвестора (предприятия)

Для заданной функции $\rho(k)$ нужно максимизировать функционал

$$\int_0^T (1 - s(t))(f(k(t)) - \rho(k)k(t))e^{-\delta t} dt \to \max_{s(t)} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = (f(k(t)) - \rho(k)k(t))s(t) - \lambda k(t), \quad \lambda = (\mu + \nu), \tag{2}$$

$$0 \leq s(t) \leq 1, \tag{3}$$

$$k(0) = k_0, \quad k(T) \geq k_T > 0. \tag{4}$$

Здесь δ – коэффициент дисконтирования.

Задача Управления

Задача государства заключается в выборе схемы налогообложения ρ, которая максимизирует функционал

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} \int_0^T N_i(t) e^{-\delta t} dt$$

при условиях, что доля выпуска $s(t)$ определяется в результате решения задачи инвестора (1)-(4).

Прогрессивная схема налогообложения моделируется возрастающей выпуклой вниз функцией, ставка налога при которой определяется, например, формулой $\rho(K) = \chi K$, где $0 \leq \chi_2 Y(t) \leq 1$.
Плоская шкала налогов моделируется функцией $\rho(K) = rho = const$, где $0 \leq \rho \leq 1$.

В [4] для частного вида производственной функции (функции Кобба-Дугласа) $F(K) = K^{\alpha}$ показано, что с точки зрения государства пропорциональный налог на имущество более эффективен, чем прогрессивный налог (в рассмотренной в работе форме), а с точки зрения инвесторов прогрессивная шкала превосходит плоскую. Дополнительная проверка (для моделей налогов на прибыль, НДФЛ, НДС) подтвердила эту гипотезу, но не удалось обосновать ее теоретически.

Классические модели экономического роста сходятся в том, что оптимальная стратегия развития экономики достигается на сбалансированном пути роста, где капитал, выпуск и потребление на единицу эффективной рабочей силы постоянны. Это присуще и модели Солоу-Свана ([5], [6]) и модели Рамсея - Касса - Купманса ([2], [7], [8]) и модели с перекрывающимися поколениями потребителей [9]. Поскольку производство и потребление являются постоянными, норма сбережений (доля продукции, направляемой на инвестиции) и удельное потребление (доход на душу населения) в каждой точке сбалансированного пути также постоянны. Для того, чтобы попасть на сбалансированный путь, требуется достаточно продолжительное время, в течение которого величина удельного потребления может оказаться существенно меньшей, чем ее значение на сбалансированном пути (подробнее далее). В результате нарушается **важное** условие: индивиды хотят получать средства для жизни постоянно (питаться нужно каждый день).

Упрощенная модель Рамсея

Используя введеные ранее обозначения, полагаем, что $s(t)$ оптимизирует инвестор, которому известны величины: $T, k_0, L(0)$ и вид неоклассической производственной функции $f(k)$.
Инвестор максимизирует функционал

$$\int_0^T (1 - s(t))f(k(t))e^{-\delta t}dt \to \max_{s(t)} \quad (5)$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = s(t)f(k((t)) - \mu)k(t), \quad (6)$$

$$0 \le s(t) \le 1, k(0) = k_0, k(T) \ge k_T, \quad (7)$$

где $k_T > 0$ нижняя граница значения фондовооруженности в момент .
Величину k_T наобходимо указать для того, чтобы обеспечить экономический потенциал за пределами конечного периода..

Для решения задачи (5)-(7) можно использовать теорию оптимального управления.

Упрощенная модель Рамсея

Используя введеные ранее обозначения, полагаем, что $s(t)$ оптимизирует инвестор, которому известны величины: $T, k_0, L(0)$ и вид неоклассической производственной функции $f(k)$.
Инвестор максимизирует функционал

$$\int_0^T (1 - s(t))f(k(t))e^{-\delta t}dt \to \max_{s(t)} \tag{5}$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = s(t)f(k((t)) - \mu)k(t), \tag{6}$$

$$0 \leq s(t) \leq 1, k(0) = k_0, k(T) \geq k_T, \tag{7}$$

где $k_T > 0$ нижняя граница значения фондовооруженности в момент .
Величину k_T наобходимо указать для того, чтобы обеспечить экономический потенциал за пределами конечного периода..

Для решения задачи (5)-(7) можно использовать теорию оптимального управления.

Решение задачи инвестора

В [3] с помощью принципа максимума Понтрягина доказано следующее утверждение (приведем его с некоторыми уточнениями).
Теорема (теорема 2.1 [3]) Пусть промежуток планирования достаточно велик. Тогда если в задаче (5)-(7) существуют допустимые траектории, существует и оптимальное управление $s(t)$ такое, что $s(t)$ равно 0 или 1 для $0 \le t \le T^*$ и для $T^{**} \le t \le T$ и

$$s(t) = s^* = \frac{\mu k^*}{f(k^*)} = \frac{f'(k^*)k^*}{f(k^*)}, \tag{8}$$

Величина k^* в (8) определяется из уравнения

$$f'(k^*) = \delta + \mu. \tag{9}$$

Константы значений: управления s^* и фондовооруженности k^* соответствуют траектории сбалансированного роста; это значение k^* известно как уровень золотого правила основного капитала.

Решение задачи инвестора

В [3] с помощью принципа максимума Понтрягина доказано следующее утверждение (приведем его с некоторыми уточнениями).
Теорема (теорема 2.1 [3]) Пусть промежуток планирования достаточно велик. Тогда если в задаче (5)-(7) существуют допустимые траектории, существует и оптимальное управление $s(t)$ такое, что $s(t)$ равно 0 или 1 для $0 \leq t \leq T^*$ и для $T^{**} \leq t \leq T$ и

$$s(t) = s^* = \frac{\mu k^*}{f(k^*)} = \frac{f'(k^*)k^*}{f(k^*)}, \tag{8}$$

Величина k^* в (8) определяется из уравнения

$$f'(k^*) = \delta + \mu. \tag{9}$$

Константы значений: управления s^* и фондовооруженности k^* соответствуют траектории сбалансированного роста; это значение k^* известно как уровень золотого правила основного капитала.

Потребление $c(\tau_2 - \tau_1)$ за период $[\tau_1, \tau_2]$ определяется по формуле

$$c = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (1 - s^*) f(k^*) e^{-\delta t} dt.$$

Для случая функции Кобба-Дугласа $k^* = (\frac{\delta+\mu}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $s^* = \mu k^{(1-\alpha)} = \frac{\mu\alpha}{\delta+\mu}$.

Пусть $c_{min}(\tau_2 - \tau_1)$ – минимальный объем средств, необходимый инвестору для существования в период $[\tau_1, \tau_2]$. Тогда, если $c(\tau_2 - \tau_1) < c_{min}(\tau_2 - \tau_1)$, то окажется, что найденная траектория не допустима.

Более того, выполнение условия $c(\tau_2 - \tau_1) > c_{min}(\tau_2 - \tau_1)$, не гарантирует существования допустимой с точки зрения инвестора траектории. В случае $k_0 < k^*$, возможна ситуация $c(\tau) < c_{min}(\tau)$, при $0 < \tau < T* < T$. В [10] показано, что хотя скорость сходимости к траектории сбалансированного роста в модели Рамсея существенна выше, чем в модели Солоу скорость, для достижения сбалансированного роста требуется несколько лет.

Напомним, что в работе благосостояние инвестора измеряется величиной с

Второе условие и новый подход

Вторым дополнительным условием является принцип: затратить минимум усилий для достижения заданной цели. Это условие определяется тем фактом, что неограниченный рост потребления влечет неограниченный рост производства. В результате такого роста неограниченно расходуются материальные ресурсы и наносится неограниченный ущерб окружающей среде. Отсутствие учета этих фактов препятствует построению макроэкономических моделей, адекватных реальности. Для выполнения обоих дополнительных условий предлагается рассматриваемый период функционирования экономики разделить на интервалы достаточно малой продолжительности. При этом средства, полученные индивидуумом в течение интервала, должны превосходить прожиточный минимум, увеличенный некоторым способом.

Общие предположения

1) Предположение, что инвестору известна продолжительность интервала времени $((\tau = T/n))$, в течение которого ему требуется на существование средств не менее c_{min}. При этом параметр c_{min} может быть известной константой, либо являться величиной, зависящей от динамики модели.

2) Общим условием является вид критерия, с помощью которого определяется величина (либо величины) доли продукции, направляемой на инвестиции, единая для всего планируемого периода $s(t)$, (либо $s_i(t)$ различные для каждого интервала $i = 1, 2, \cdots, n$)).

3) Предположение о том, что продолжительности интервалов малы настолько, что не тебуется дисконтирования при сравнении показателей соседних интервалов: $e^{-\delta\tau i} \cong e^{-\delta\tau(i+1)}$.

Модель I с постоянной нормой сбережения.

Предполагается, что известны величины $((1+r)^i c_{min})$, требуемых на каждом интервале средств, где r заданная инвестором скорость роста благосостояния. Тогда Модель I формулируется следующим образом. Инвестор максимизирует функционал

$$\int_0^T f(k(t))e^{-\delta t}dt \to \min_{s(t)} \tag{10}$$

при ограничениях

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (1-s(t))f(k(t))dt \geq (1+r)^{i-1}c_{min}, \tag{11}$$

где

$$\tau_{i-1} = \tau(i-1), \quad \tau_i = i\tau, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

$$\dot{k}(t) = s(t)f(k((t)) - \mu k(t), \tag{12}$$

$$0 \leq s(t) \leq 1, \quad k(0) = k_0. \tag{13}$$

Отметим, что в ограничениях (13) отсутствует условие $k(T) \geq k_T$, так как в новых моделях экономический потенциал после окончания рассматриваемого периода обеспечивается автоматически в следствие (11). В общем случае величина $r \geq 0$; в случае, когда значение r равнняется нулю, удельное потребление превосходит cmin в течение всего планируемого периода.

Модель 2 с постоянной нормой сбережения.

Модель 2 отличается от Модели 1 тем, что ограничения на прожитучный минимум формируются динамически на каждом интервале всего планируемого периода. Предполагается, что инвестор знает величину c_{min}, далее мера благосостояния на каждом последующем интервале должна превосходить предыдущую заданным обрпзом. Возникает задача: минимизировать функционал (10) при ограничениях (12), (13) и ограничениях

$$\int_0^{\tau_1} (1 - s(t))f(k(t))dt \geq c_{min}, \tag{14}$$

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (1 - s(t))f(k(t))dt \geq$$

$$\geq (1 + r)\int_{\tau_{i-2}}^{\tau_{i-1}} (1 - s(t))f(k(t))dt, \tag{15}$$

где

$$\tau_i = i\tau, \quad i = 2, ..., n.$$

С помощью нового подхода можно построить различные модели развития экономики. Приведем еще один вариант такой модели, в котором предполагается, что управление s будет изменяться при переходе от предыдущего интервала к последующему интервалу времени.

Модель 2 с постоянной нормой сбережения.

Модель 2 отличается от Модели 1 тем, что ограничения на прожитучный минимум формируются динамически на каждом интервале всего планируемого периода. Предполагается, что инвестор знает величину c_{min}, далее мера благосостояния на каждом последующем интервале должна превосходить предыдущую заданным обрпзом. Возникает задача: минимизировать функционал (10) при ограничениях (12), (13) и ограничениях

$$\int_0^{\tau_1} (1 - s(t))f(k(t))dt \geq c_{min}, \tag{14}$$

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (1 - s(t))f(k(t))dt \geq$$

$$\geq (1 + r) \int_{\tau_{i-2}}^{\tau_{i-1}} (1 - s(t))f(k(t))dt, \tag{15}$$

где

$$\tau_i = i\tau, \quad i = 2, ..., n.$$

С помощью нового подхода можно построить различные модели развития экономики. Приведем еще один вариант такой модели, в котором предполагается, что управление s будет изменяться при переходе от предыдущего интервала к последующему интервалу времени.

Модель 3 с кусочно-постоянной нормой сбережения.

Инвестор в этом варианте на i-м шаге исследует проблему: как с минммальными усилиями получить средств не меньше, чем на предыдущем шаге? В отличие от Модели 1 и Модели 2, для решения этой задачи он определяет константу s_i , считая, что в силу малой продолжительности шага величина управления на нем не изменяется. Оптимизация динамики развития экономики осуществляется за n шагов, на каждом из которых, начиная со второго, решается следующая задача:

Минимизировать функционал

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f(k(t))dt \to \min_{s_i)} \qquad (16)$$

при ограничениях

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (1 - s_i) f(k(t))dt \geq$$

$$\geq (1 + r) \int_{\tau_{i-2}}^{\tau_{i-1}} (1 - s_{i-1}) f(k(t))dt, \qquad (17)$$

$$\dot{k}(t) = s_i f(k(t)) - \mu k(t), \qquad (18)$$

$$0 \leq s_i \leq 1, \quad k(\tau_{i-1}) = k_{i-1}, \qquad (19)$$

где $i = 2, ..., n, \quad \tau_i = i\tau, k_i = k^*(\tau_i)$, при условии, что $k^*(t)$ определяется в результате решения задачи (16) - (19) на шаге i.

На первом шаге ($i = 1$) инвестор минимизирует функционал (16) при ограничениях (18), (19), а ограничение (17) заменяется следующим

$$\int_0^{\tau} (1 - s_1 f(k(t))dt \geq c_{min}, \tag{20}$$

в этом случае $k(0) = k_0$.

Модель 4 с кусочно-постоянной нормой сбережения.

Данная модель является вариантом **Модели 3** в случае, когда производственная функция на каждом интервале $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ апроксимируется линейной функцией $f(k(t)) = a_i k(t)$ в силу достаточно малой их продолжительностиdue. Правые части ограничений (17) задаются не зависимо от предыдущих шагов. В начале определяются величины $C_i : C_1 = c_{min}, C_i = (1 + r)C_{i-1}$. are determined. Далее на каждом из n шагов решается следующая задача.

Минимизировать функционал

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} a_i k(t) dt \to \min_{s_i} \tag{21}$$

при ограничениях

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (1 - s_i) a_i k(t) dt \geq C_i, \tag{22}$$

$$\dot{k}(t) = s_i a_i k(t) - \mu k(t), \tag{23}$$

$$0 \leq s_i \leq 1, \quad k(\tau_{i-1}) = k_{i-1}, \tag{24}$$

где $i = 1, ..., n, \quad \tau_i = i\tau$.
Как и ранее $k(0) = k_0$, и для $i \geq 1 \quad k_i = k^*(\tau_i)$, а величина $k^*(t)$ определяется при решении задачи (21) - (24) на шаге i.

Учитывая условия (23), (24), нетрудно проверить, что функция $k(t)$ в интервале $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ имеет вид

$$k(t) = k_{i-1} e^{(a_i s_i - \mu)(t - \tau_{i-1})}$$

где $k(i-1) = k(\tau_{i-1})$, $a_i = f'(k(i-1))$.
Отсюда задача первого шага превращается в задачу: Минимизировать функционал

$$\int_0^\tau a_1 k_0 e^{(a_1 s_1 - \mu)t} dt \to \min_{s_1} \qquad (25)$$

при ограничениях

$$0 \le s_1 \le 1, \qquad (26)$$

$$\int_0^\tau a_1 (1 - s_1) k_0 e^{(a_1 s_1 - \mu)t} dt \ge C_1, \qquad (27)$$

где $a_i = f'(k_0)$.

1. *F. Y. Edgeworth* The Pure Theory of Taxation // The Economic Journal, Vol. 7, No. 25. (Mar., 1897), pp. 46-70.
2. *Ramsey F.P.* A Mathematical Theory of Saving // Economic Journal, 1928. Vol. 38, No 152, pp. 543-559.
3. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. - М.: Наука, 1984.
4. *Рылова А.А.* О налогообложении фондов в модели Рамсея-Солоу // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14. № 1, с. 84-97.
5. *Solow R. M.* A Contribution to the Theory of Economic Growth, The Quarterly Journal of Economics, vol. 70, issue 1, pp. 65-94.
6. *Swan T. W.* Economic Growth and Capital Accumulation, Economic Record, vol. 32, issue 2, pp. 334-361.
7. *Cass D.* Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation, The Review of Economic Studies, vol. 32, issue 3, pp. 233-240.
8. *Tjalling C. Koopmans* On the Concept of Optimal Economic Growth. In: Johansen, J., Ed., The Econometric Approach to Development Planning, North Holland, Amsterdam: Elsevier, 1965.
9. *Diamond P. A.* National Debt in a Neoclassical Growth Model, The American Economic Review, vol. 55, issue 5, pp. 1126–1150.
10. *David H. Romer* Advanced macroeconomics, 4th ed. p. cm. University of California. Berkeley: McGraw-Hill, 2012.