

Случайные графы в моделировании сетей: проблемы и решения

А.С. Родионов

alrod@sscc.ru

Структура доклада

1. Модели структур ненадёжных сетей
2. Рассматриваемые показатели (характеристики)
3. Точные алгоритмы вычисления значений показателей
4. Полиномы связности
5. Кумулятивные оценки значений показателей
6. Структурная оптимизация

Введение

В структурном анализе сетей с ненадёжными элементами в основном используют:

- Случайные и нечёткие графы
- Случайные и нечёткие гиперграфы
- Случайные и нечёткие гиперсети

В лекции рассматриваются случайные графы и гиперсети с надёжными вершинами и ненадёжными связями

Часть 1. Точное вычисление показателей связности

Рассматриваемые показатели

Рассматриваются:

- k -терминальная связность ($2 \leq k \leq n$);
- Среднее арифметическое вероятностей парной связности на заданном подмножестве узлов;
- Математическое ожидание числа пар связных (несвязных) узлов;
- Математическое ожидание размера подграфа случайного графа (СГ), содержащего выделенную вершину;
- Среднее арифметическое значений максимальных потоков между вершинами из заданного подмножества, либо математических ожиданий этих значений;
-

Основные подходы

В самом общем случае $E[\mu(G)] = \sum_{H \in \Gamma} P(H) \cdot \mu(H)$,

где Γ – множество всех возможных реализаций структуры.

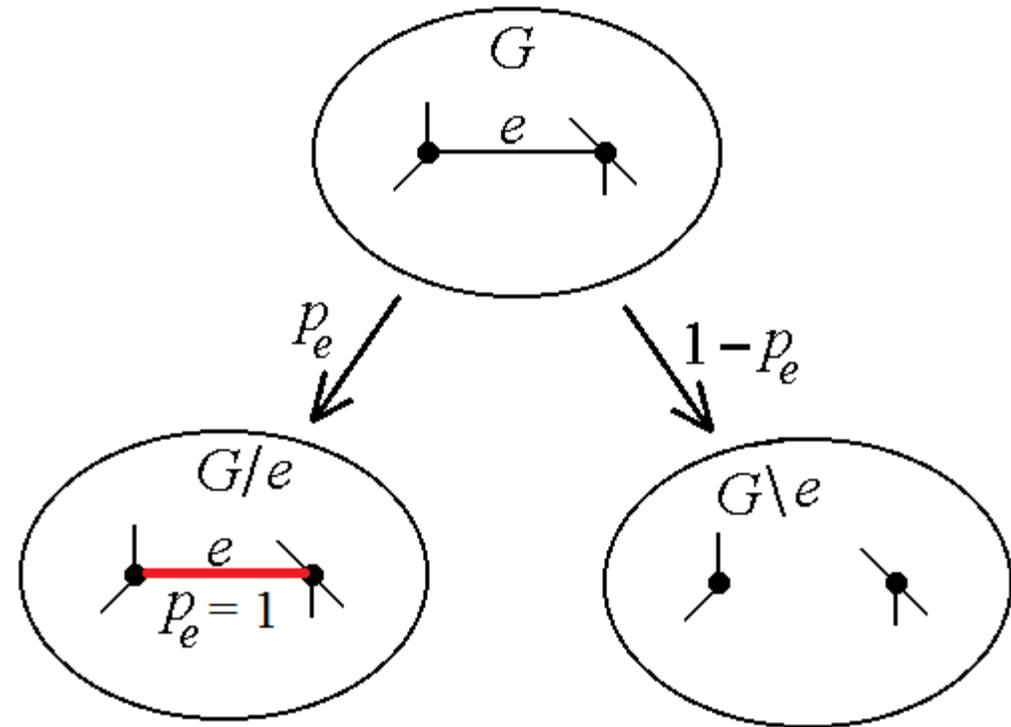
Для сокращения перебора используют два основных подхода:

BDD позволяет получать частичные суммы для некоторых одинаковых значений $\mu(H)$, **метод факторизации** позволяет производить направленный перебор, иногда получая частичные суммы, в том числе для разных значений $\mu(H)$.

Метод факторизации

Метод факторизации заключается в рассмотрении двух альтернатив состояния произвольного элемента структуры: отказа либо работоспособного состояния. Для случайного графа с независимо выходящими из строя рёбрами имеем:

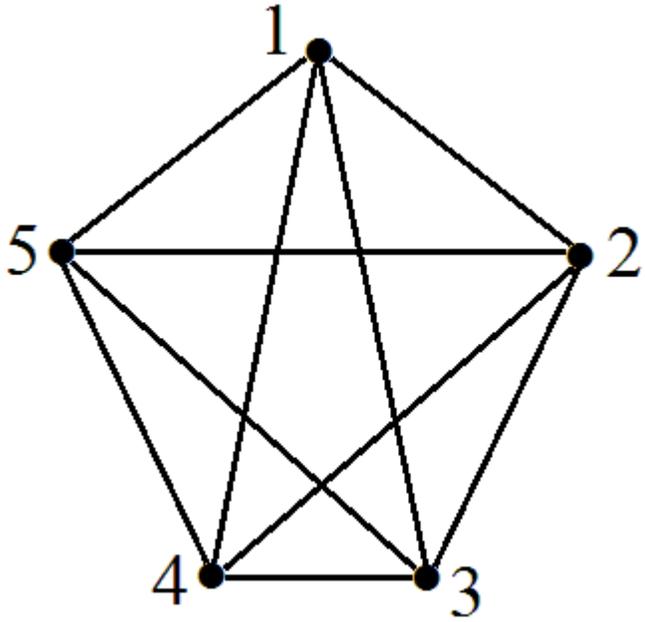
$$\mu(G, p) = p_e \mu(G/e) + (1-p_e)\mu(G \setminus e)$$



Рекурсивный процесс продолжается до получения графа, для которого показатель может быть рассчитан непосредственно. Возможность «отсечения» какой-либо ветви разбора **за счёт применения конечной формулы на достаточно высоком уровне** позволяет существенно сузить пространство перебора при сохранении теоретического уровня сложности.

- Таким образом, при построении алгоритма вычисления конкретного показателя необходимо решать следующие задачи:
- Найти конечные формулы вычисления усредняемого функционала для возможно большего количества легко проверяемых частных случаев и для общего случая возможно большей размерности.
- Применить подходящие приёмы декомпозиции графа и редукции его размерности.
- Выбрать подходящий способ организации перебора возможных реализаций графа.

Вероятность связности 5-вершинного графа



$$1 - R(G) = bc(adk_1 + fe(dgk_6 + uvk_8)) + cv(fhk_4 + ag(buk_{10} + ehk_{13})) + bh(euk_3 + dv(afk_{12} + egk_{15})) + fg(aek_2 + hu(abk_7 + cdk_9)) + du(gvk_5 + ae(chk_{11} + fvk_{14})).$$

$$k_1 = 1 - e(fg + hu), \quad k_2 = 1 - h(bu + cv), \quad k_3 = 1 - v(cf + dg),$$

$$k_4 = 1 - d(ab + gu), \quad k_5 = 1 - a(bc + ef),$$

$$k_6 = (1 - a)(1 - h)(1 - u) + (1 - a)(1 - v)((1 - h)u + h(1 - u)) + ahu(1 - 4v),$$

$$k_7 = (1 - c)(1 - d)(1 - e) + (1 - e)(1 - v)((1 - c)d + c(1 - d)) + dev,$$

$$k_8 = (1 - a)(1 - d)(1 - h) + (1 - g)(1 - h)((1 - a)d + a(1 - d)) + ahg,$$

$$k_9 = (1 - a)(1 - b)(1 - v) + (1 - e)(1 - v)((1 - a)b + a(1 - b)) + aev,$$

$$k_{10} = (1 - e)(1 - d)(1 - f) + (1 - d)(1 - h)((1 - e)f + e(1 - f)) + dfh,$$

$$k_{11} = (1 - b)(1 - f)(1 - g) + (1 - b)(1 - v)((1 - f)g + f(1 - g)) + bgv,$$

$$k_{12} = (1 - c)(1 - e)(1 - g) + (1 - c)(1 - u)((1 - e)g + e(1 - g)) + ceu,$$

$$k_{13} = (1 - b)(1 - d)(1 - f) + (1 - f)(1 - u)((1 - b)d + b(1 - d)) + bdf,$$

$$k_{14} = (1 - b)(1 - c)(1 - g) + (1 - g)(1 - h)((1 - b)c + b(1 - c)) + bcg,$$

$$k_{15} = (1 - a)(1 - c)(1 - u) + (1 - f)(1 - u)((1 - a)c + a(1 - c)) + cfu.$$

$$a=p_{12}; \quad b=p_{13}; \quad c=p_{14};$$

$$d=p_{15}; \quad e=p_{23}; \quad f=p_{24};$$

$$g=p_{25}; \quad h=p_{34}; \quad u=p_{35};$$

$$v=p_{45}.$$

Редукция цепей и ветвление по цепи

Если в графе G есть цепь из k ребер e_1, e_2, \dots, e_k с вероятностями присутствия p_1, p_2, \dots, p_k , соединяющая вершины s и t , то вероятность связности графа равна

$$R(G) = \left[\prod_{i=1}^k p_i + p_{st} \sum_{i=1}^k (1 - p_i) \prod_{j \neq i} p_j \right] \cdot R(G/C) + (1 - p_{st}) \sum_{i=1}^k (1 - p_i) \prod_{j \neq i} p_j \cdot R(G).$$

С другой стороны, возможна замена цепи ребром с вероятностью присутствия

$$p = \frac{1}{\sum_{i=1}^k p_i^{-1} - k + 1}.$$

Тогда
$$R(G(n, m)) = \prod_{i=1}^k p_i \left(\sum_{i=1}^k p_i^{-1} - k + 1 \right) R(G'(n - k + 1, m - k + 1)).$$

Пример применения метода факторизации (2003г)

1. Вероятность связности случайного графа

Получены конечные формулы для:

- Вероятности связности графов размерности до 5 вершин;
- Циклов.

Получены методы редукции:

- Висячих вершин;
- Цепей (заменой ребром либо *ветвлением по цепи*).

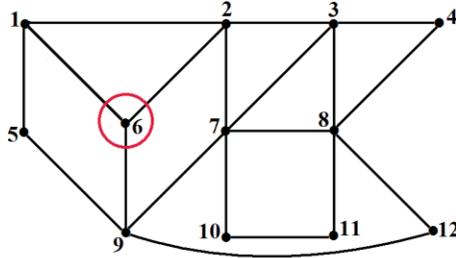
Получены методы декомпозиции:

- По мосту;
- По точке сочленения (шарниру).

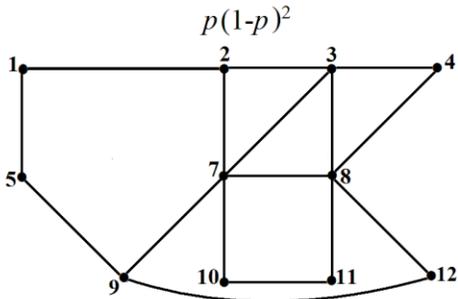
Результаты расчетов для 30 случайных 20-вершинных графов.

Число ребер	Время счета (секунд)		
	МШ	РМШ	ППР
19-22	0.11	0.11	0.11
23	0.17	0.22	0.16
24	0.17	0.28	0.11
25	0.22	0.72	0.22
26	0.49	0.88	0.27
27	1.10	1.54	0.38
28	3.46	2.58	0.66
29	5.21	3.18	0.88
30	25.01	6.65	1.64
31	30.10	8.63	3.24
32	47.29	10.88	4.06
33	267.00	37.08	8.23
34	337.02	54.82	12.83
35	967.23	107.77	23.21

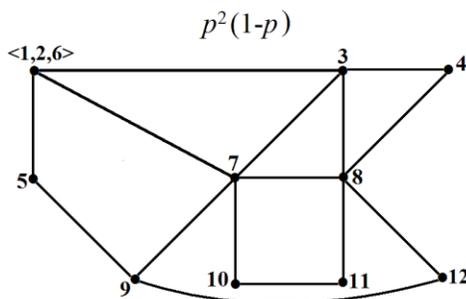
Факторизация по рёбрам, инцидентным вершине степени 3



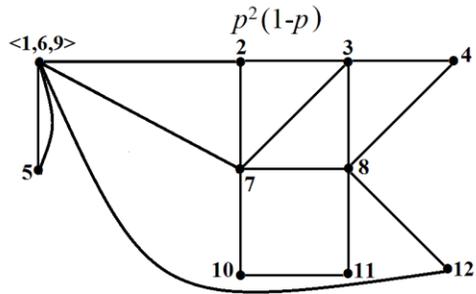
$G(12,19)$



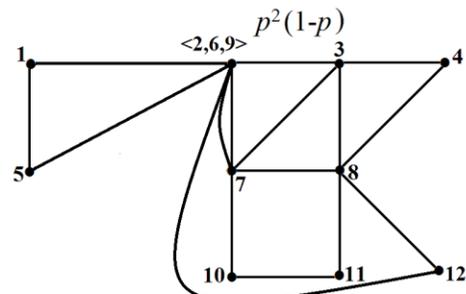
$G_1(11,16)$



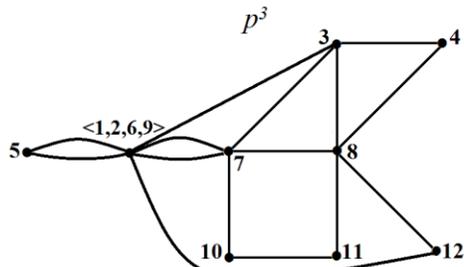
$G_2(10,15)$



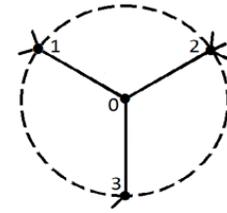
$G_3(10,16)$



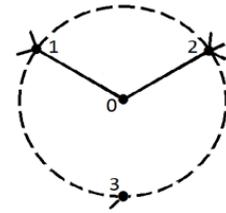
$G_4(10,16)$



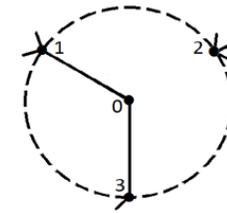
$G_5(9,15)$



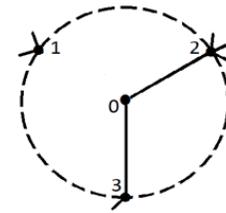
$G_1 = G/e_1/e_2/e_3$



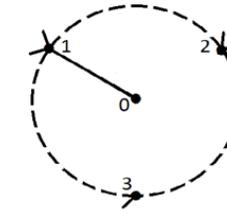
$G_2 = G/e_1/e_2 \setminus e_3$



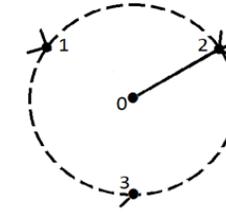
$G_3 = G/e_1 \setminus e_2/e_3$



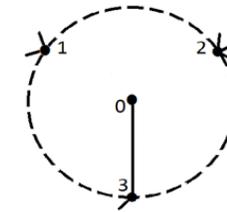
$G_4 = G \setminus e_1/e_2/e_3$



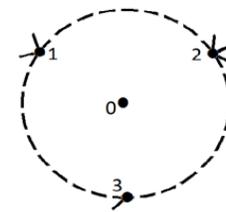
$G_5 = G/e_1/e_2 \setminus e_3$



$G_6 = G \setminus e_1/e_2 \setminus e_3$



$G_7 = G \setminus e_1 \setminus e_2/e_3$



$G_8 = G \setminus e_1 \setminus e_2 \setminus e_3$

Пример применения метода факторизации (2008г)

2. Математическое ожидание числа несвязных пар вершин СГ (EDP)

Эффект от повышения размерности рассчитываемых графов (среднее время расчёта, 20 случайных связных графов)

Получены конечные формулы для:

- EDP графов размерности до 5 вершин;
- Циклов;
- Деревьев.

Получены методы редукции:

- Висячих вершин;
- Цепей (ветвлением по цепи).

Получены методы декомпозиции:

- По мосту;
- По точке сочленения (шарниру).

	Ветвление до 4-х вершинного графа	Ветвление до 5-и вершинного графа
N=9 M=36	50 ms	<1 ms
N=10 M=45	540 ms	123 ms
N=11 M=55	5320 ms	2030 ms
N=12 M=66	52 s	20 s

Прямой расчёт EDP

$$n=2: N(G)=w_1w_2 (1-p_{12}).$$

$$\begin{aligned} n=3: N(G) &= (1-p_{12})(1-p_{23})(1-p_{13}) (w_1w_2+w_2w_3+w_1w_3) + p_{12}(1-p_{23})(1-p_{13}) \\ & (w_1w_3+w_2w_3) + (1-p_{12})p_{23}(1-p_{13})(w_1w_2+w_1w_3) + \\ & (1-p_{12})(1-p_{23})p_{13}(w_1w_2+w_2w_3) \\ & = w_1w_2(1-p_{12})(1-p_{23}p_{13}) + w_1w_3(1-p_{13})(1-p_{12}p_{23}) + \\ & w_2w_3(1-p_{23})(1-p_{12}p_{13}). \end{aligned}$$

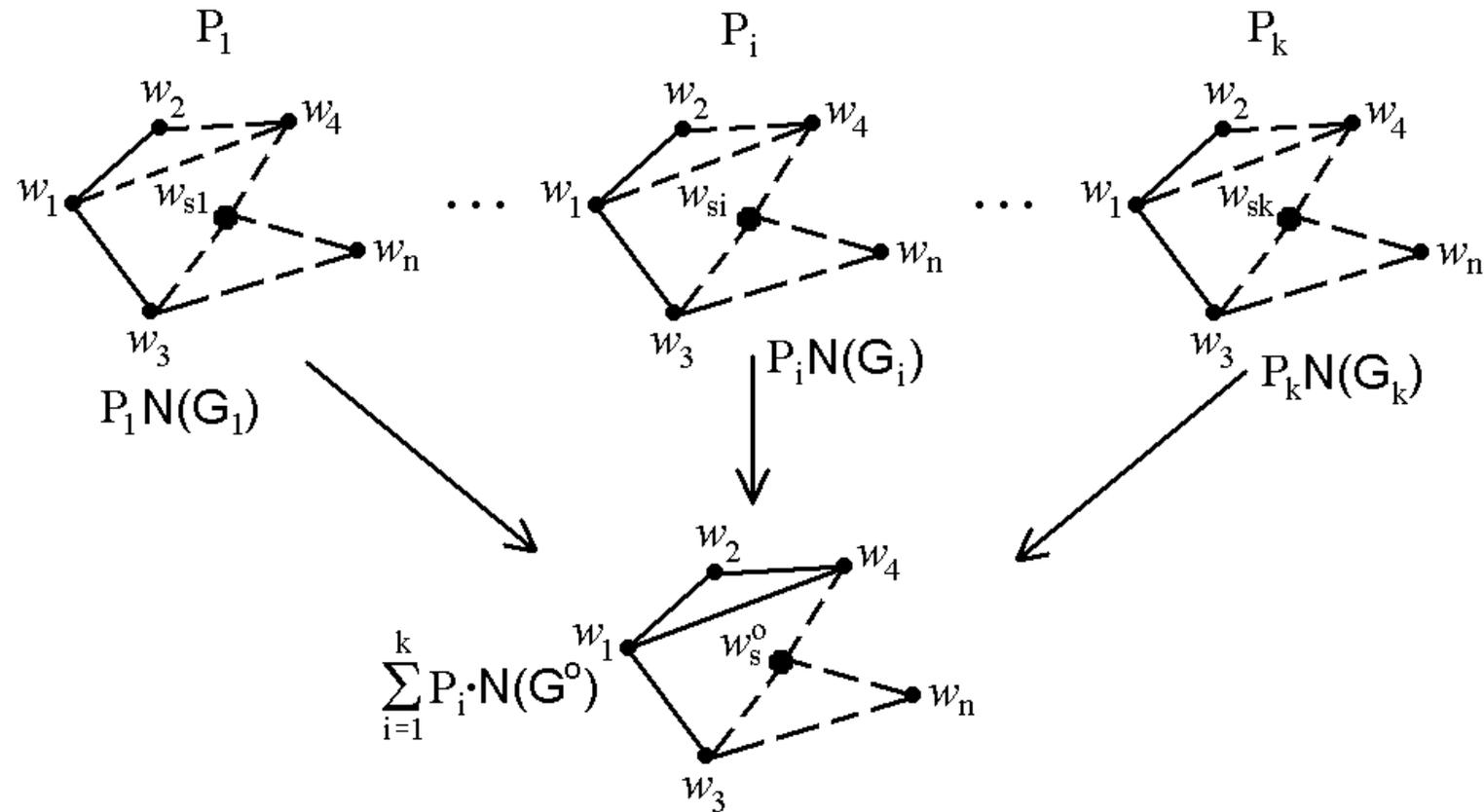
$N=4,5$ прошу поверить на слово: выражения получены, но существенно превышают размер слайда ☺

Рассмотрение сходных структур

Основываясь на том факте, что $N(G)$ есть линейная форма от w_i и квадратичная от w_i и w_j , мы можем получить ряд полезных выражений.

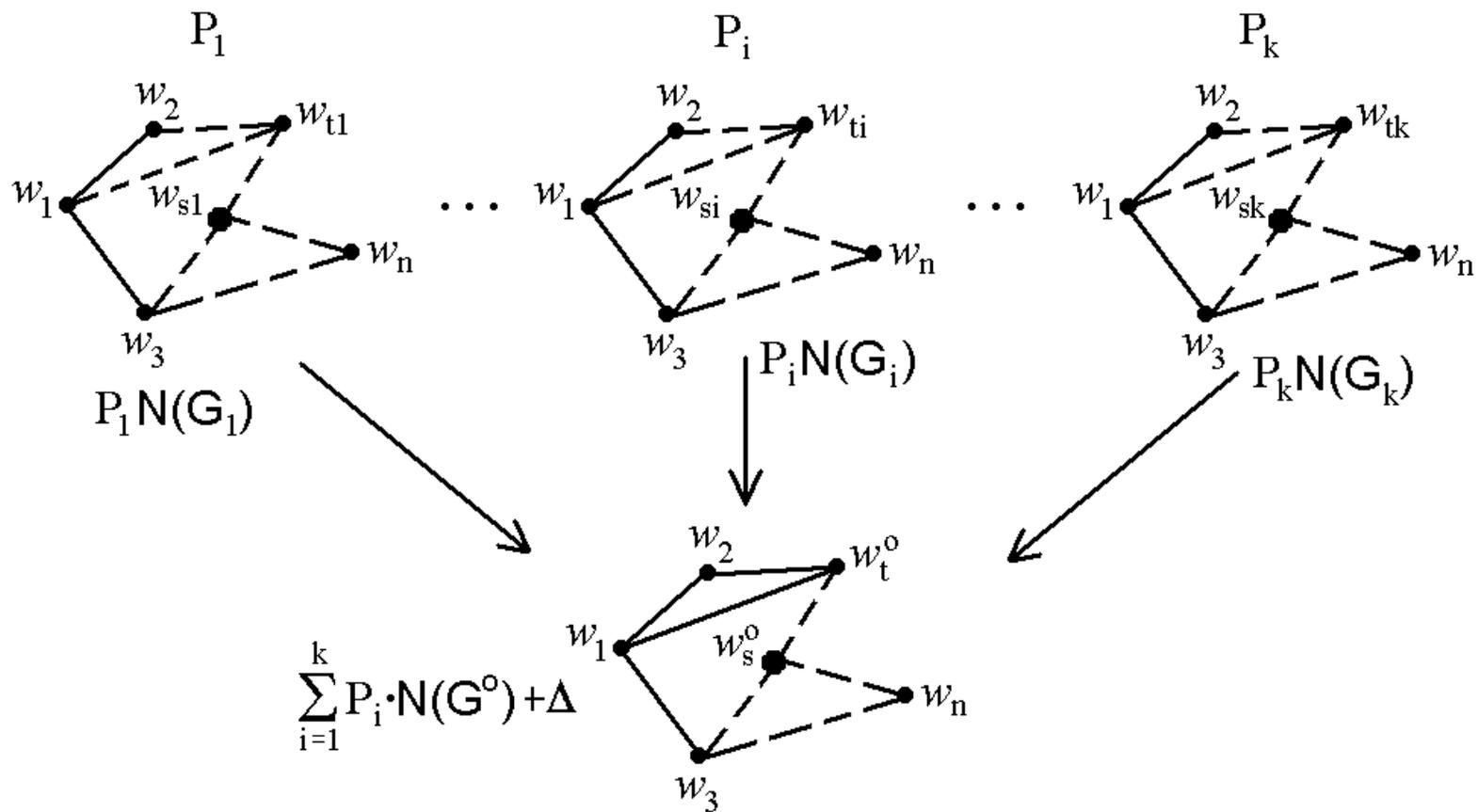
$$\begin{aligned} N(G) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} w_i w_j = A w_i + B \\ &= \alpha w_i + \beta w_j + \gamma w_i w_j + \delta. \end{aligned}$$

Одна вершина отличается весом



$$WT_s = \frac{\sum_{i=1}^k P_i w_{si}}{\sum_{i=1}^k P_i}$$

Две вершины отличаются весом



$$WT_s = \sum_{i=1}^k p_i w_{si} / \sum_{i=1}^k p_i; \quad WT_t = \sum_{i=1}^k p_i w_{ti} / \sum_{i=1}^k p_i;$$

$$\Delta = a_{st} \left(\sum_{i=1}^k p_i \cdot \sum_{i=1}^k p_i w_{si} w_{ti} - \sum_{i=1}^k p_i w_{si} \cdot \sum_{i=1}^k p_i w_{ti} \right) / \sum_{i=1}^k p_i$$

Следствие 1 (удаление висячей вершины)

Пусть граф $G(n,m)$ имеет висячую вершину v_s связную некоторой вершине v_t . Тогда

$$N(G) = N(G^o) + (1 - p_{st})w_i \cdot W(G \setminus e_{st}),$$

где G^o имеет структуру $G \setminus e_{st}$, но с весом вершины v_t равным

$$WT_t(G^o) = p_{st}(w_s + w_t) + (1 - p_{st})w_t = w_t + p_{st}w_s.$$

Следствие 2 (ветвление по цепи)

Теорема 1. Пусть граф $G(n, m)$ содержит простую цепь из k рёбер $e_1 = (v_s(v_0), v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_k = (v_{k-1}, v_t(v_k))$ с вероятностями присутствия p_1, p_2, \dots, p_k , соединяющую вершины v_s и v_t степени более 2. Тогда EDP этого графа может быть выражено как

$$N(G) = \left[p_{st} + (1 - p_{st}) \prod_{i=1}^k p_i \right] \cdot N(G^*) + \left[\sum_{i=0}^{k-1} (1 - p_{i+1}) \prod_{j=i+2}^k p_j \right] \cdot N(G^o) + C, \quad (21)$$

где

G^* граф, полученный из G стягиванием v_s и v_t по цепи и удалением e_{st} (если существует),

G^o граф, полученный из G удалением цепи и ребра e_{st} .

Веса $WT_s(G^*)$, $WT_s(G^o)$ и $WT_t(G^o)$ являются полиномами от w_i и p_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, свободный член C зависит также от a_{st} .

$$C = a_{st} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} q_{i+1} \prod_{j=i+2}^k p_j \left(w_0 + \sum_{j=1}^i w_j \prod_{s=1}^j p_s \right) \binom{k}{j=i+1} - \frac{\left[\sum_{i=0}^{k-1} \left(w_0 + \sum_{j=1}^i w_j \prod_{s=1}^j p_s \right) q_{i+1} \prod_{j=i+2}^k p_j \right] \left[\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{j=i+1} q_{i+1} \prod_{j=i+2}^k p_j \right]}{\left[\sum_{i=0}^{k-1} q_{i+1} \prod_{j=i+2}^k p_j \right]} \right\},$$

$$WT_{\langle s,t \rangle}(G^*) = \prod_{i=1}^k p_i \sum_{i=0}^k w_i / \prod_{i=1}^k p_i, \quad a_{st} = 1 - R_{st}(G \setminus Ch), \quad q_i = 1 - p_i.$$

$$WT_0(G^o) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \left(w_0 + \sum_{j=1}^i w_j \prod_{s=1}^j p_s \right) q_{i+1} \prod_{j=i+2}^k p_j}{\sum_{i=0}^{k-1} q_{i+1} \prod_{j=i+2}^k p_j},$$

$$WT_k(G^o) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{j=i+1} q_{i+1} \prod_{j=i+2}^k p_j}{\sum_{i=0}^{k-1} q_{i+1} \prod_{j=i+2}^k p_j},$$

Метод факторизации в анализе гиперсетей

В случае гиперсети, имеющей первичную сеть с ненадёжными элементами, это означает, что ветвление идёт по состояниям компонентов первичной сети, тогда как проверяется связность уложенной в неё вторичной сети. Таким образом, например, в случае ненадёжных ветвей имеем следующее рекурсивное выражение для вычисления вероятности связности вторичной сети:

$$R(WS) = p_{ij}R(WS / v_{ij} \text{ присутствует}) + (1 - p_{ij})R(WS / v_{ij} \text{ отсутствует}),$$

где p_{ij} – вероятность присутствия ветви v_{ij} . При вычислении первого слагаемого происходит стягивание вершин x_i и x_j в одну вершину, а при вычислении второго – ветвь v_{ij} просто удаляется.

Организация полного перебора разрушений

Кажется естественным рассматривать разрушения по порядку: все варианты отказа одного элемента, затем двух, трёх и т.д. На самом деле это требует применения пусть простого, но алгоритма, требующего дополнительное время. Пронумеровав же ненадёжные элементы можно построить маску их состояний

$$X=(x_1,x_2,x_3,\dots,x_N), x_i \in \{0,1\}.$$

Интерпретировав маску как целое число в двоичном представлении, можно рассматривать разрушения в порядке возрастания (убывания) этого числа, что удобно при параллельной организации перебора: вычислителям рассылаются диапазоны масок для вычисления значений показателя.

Часть 2. Полиномы связности

Представление ПН

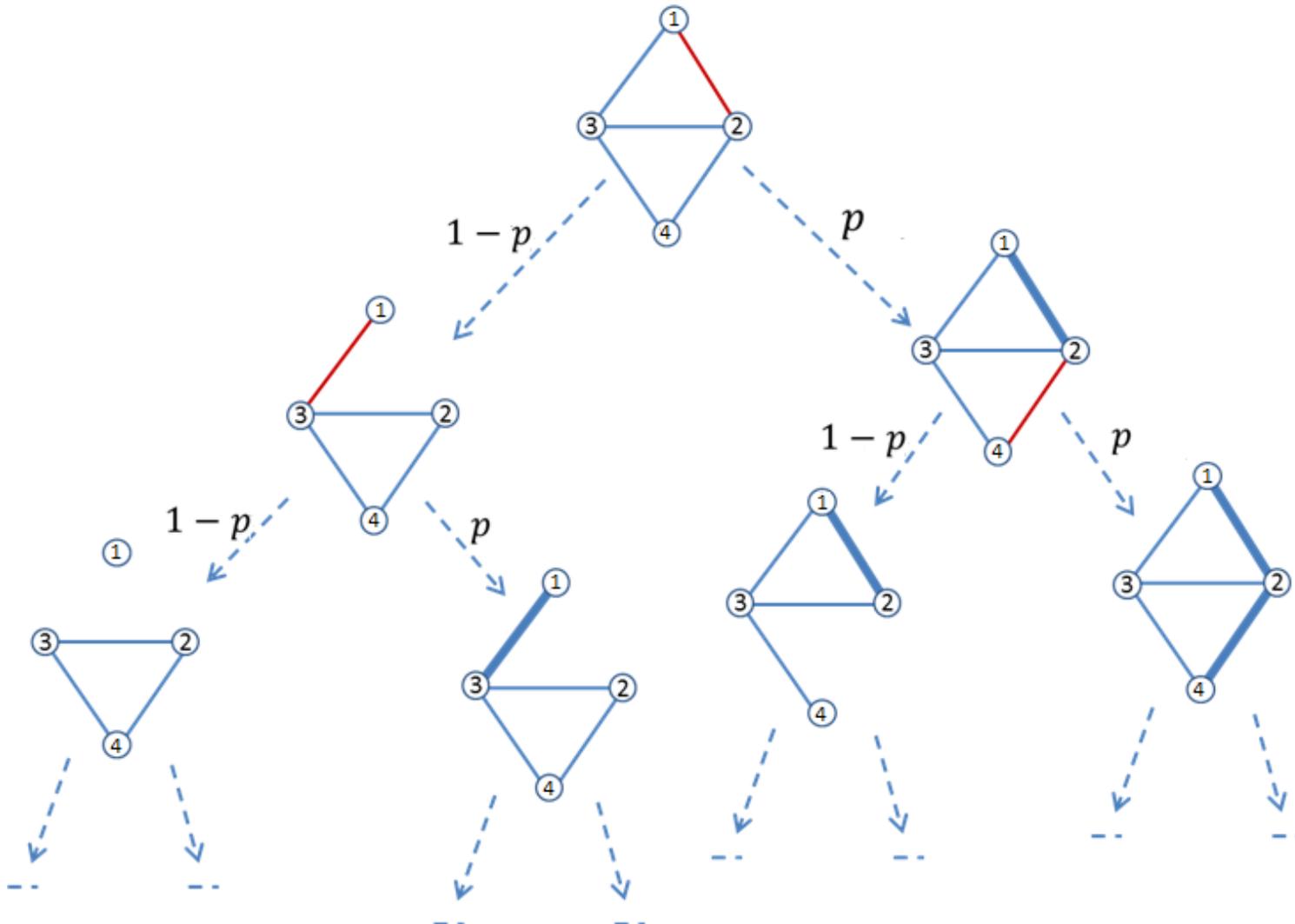
$$R(G, p) = \sum_{i=0}^m a_i (1-p)^i p^{m-i} = \sum_{i=0}^m b_i p^i$$

$$b_0 = a_m; \quad b_{m-i} = \sum_{j=i}^m (-1)^{i+j} C_j^i a_j, \quad i = 0, \dots, m-1;$$

$$a_m = b_0; \quad a_i = b_{m-i} + \sum_{j=i+1}^m (-1)^{i+j-1} C_j^i a_j, \quad i = m-1, \dots, 0.$$

a_i равно общему вкладу всех возможных реализаций (суграфов) СГ в значение показателя

Представление ПН и метод факторизации



Метод факторизации естественным образом даёт нужное представление, но: **возможные редукции и декомпозиции могут привести к разной сумме степеней у слагаемых!**

Выравнивание степеней слагаемых

Используем умножение на полином, тождественно равный единице:

$$I_n(p) \equiv 1 \equiv 1^n \equiv (1-p+p)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i p^i (1-p)^{n-i},$$

$$I_0(p) = 1.$$

Пример:

$$\begin{aligned} & p(1-p) + p(1-p)^3 \\ &= [p^2 + 2p(1-p) + (1-p)^2]p(1-p) + p(1-p)^3 \\ &= p^3(1-p) + 2p^2(1-p)^2 + 2p(1-p)^3. \end{aligned}$$

Использование смысла коэффициентов

Для вероятности связности СГ: i -ый коэффициент соответствует числу связных суграфов, которые можно получить удалением i рёбер. Это означает, что для всех $i > m - n + 1$ $a_i = 0$, т.е. **можно не тратить операции на приведение подобных** при их получении! С другой стороны, для k -связных графов первые $k-1$ коэффициентов также известны.

В качестве тестовых примеров были выбраны циклы C_1, C_2, C_3 , состоящие из 20, 40 и 50 мультирёбер кратности 20 и решётки G_1 (4x4), G_2 (5x5) и G_3 (6x6).

Время вычислений (в секундах)

Graph	Maple 11	Our algorithm
C_1	2.8	< 0.01
C_2	14.3	< 0.01
C_3	32.4	0.01
G_1	3.0	0.02
G_2	1123.0	0.50
G_3	> 24 hours	507.2

Имеем $R(G)=(1-p)R(G_1)+pR(G_2)$, откуда $a_i=a_{1,i+1}+a_{2i}$.

Рассматривая возможные состояния **2** рёбер, получаем

$$R(G)=(1-p)^2R(G\setminus e_1\setminus e_2)+(1-p)p[R(G\setminus e_1/e_2)+R(G/e_1\setminus e_2)]+p^2R(G/e_1/e_2).$$

Перейдя к рассмотрению состояний **3** рёбер, имеем уже

$$R(G)=(1-p)^3R(G\setminus e_1\setminus e_2\setminus e_3)+(1-p)^2p[R(G\setminus e_1\setminus e_2/e_3)+R(G\setminus e_1/e_2\setminus e_3)+R(G/e_1\setminus e_2\setminus e_3)]+(1-p)p^2[R(G\setminus e_1/e_2/e_3)+R(G/e_1\setminus e_2/e_3)+R(G/e_1/e_2\setminus e_3)]+p^3R(G/e_1/e_2/e_3),$$

И так далее. Поскольку известны точные значения для некоторых коэффициентов получаемых полиномов, точность итогового полинома надёжности повышается.

$$\begin{aligned}
R(G,p) &= \sum_{i=0}^{m-3} a_{1i} p^{m-i+3} q^i + \sum_{i=0}^{m-3} (a_{2i} + a_{3i} + a_{4i}) p^{m-i+2} q^i + \\
&\quad \sum_{i=0}^{m-3} (a_{5i} + a_{6i} + a_{7i}) p^{m-i+1} q^i + \sum_{i=0}^{m-3} a_{8i} p^{m-i} q^i \\
&= a_{10} p^m + (a_{11} + a_{20} + a_{30} + a_{40}) p^{m-1} q + (a_{12} + a_{21} + a_{31} + a_{41} + a_{50} + a_{60} + a_{70}) p^{m-2} q^2 + \\
&\quad \sum_{i=3}^{m-3} (a_{1i} + a_{2,i-1} + a_{3,i-1} + a_{4,i-1} + a_{5,i-2} + a_{6,i-2} + a_{7,i-2} + a_{8,i-3}) p^{m-i} q^i + \\
&\quad (a_{2,m-4} + a_{3,m-4} + a_{4,m-4} + a_{5,m-4} + a_{6,m-4} + a_{7,m-4} + a_{8,m-5}) p q^{m-2} \\
&\quad (a_{5,m-3} + a_{6,m-3} + a_{7,m-3} + a_{8,m-4}) p q^{m-1} + a_{8,m-3} q^m.
\end{aligned}$$

Получение некоторых коэффициентов EDP-полинома

$$n_m = C_n^2 = n(n-1)/2.$$

$$n_{m-1} = m(C_n^2 - 1) = m[n(n-1) - 2]/2.$$

$$K_2 = \sum_{v \in D_2} C_{deg(v)}^2,$$

$$\begin{aligned} n_{m-2} &= K_2 [C_{n-3}^2 + 3(n-3)] + (C_m^2 - K_2) [C_{n-4}^2 + 4(n-4) + 4] \\ &= K_2 (C_n^2 - 3) + (C_m^2 - K_2) (C_n^2 - 2) = C_m^2 (C_n^2 - 2) - K_2. \end{aligned}$$

$$K_3^{\sim} = \sum_{e_{ij} \in U^+} [(deg(v_i) - 1)(deg(v_j) - 1)] - 3T = S_1 - 3T,$$

$$n_{m-3} = C_m^3 (C_n^2 - 3) - K_2(m-2) + 6T - S_1.$$

D_i – множество вершин степени не менее i ;

T – множество треугольных граней;

U^+ – множество рёбер, соединяющих вершины степени 2 (внутренние вершины цепей).

Часть 3. Кумулятивные оценки показателей связности

Если получить несколько реализаций (обозначим множество таких суграфов как Γ_0), то LB не меньше, а UB не больше, чем соответствующая частичная сумма.

Предположим, что для μ известны его минимальное (m) и максимальное (M) возможные значения. Тогда очевидно имеем:

$$LB = \sum_{i=1}^k P(H_i)\mu(H_i) + m(1 - \sum_{i=1}^k P(H_i));$$
$$UB = \sum_{i=1}^k P(H_i)\mu(H_i) + M(1 - \sum_{i=1}^k P(H_i)).$$

При получении новой (i -ой) реализации границы уточняются:

$$LB_i = LB_{i-1} + P(H_i) \cdot [\mu(H_i) - \mu_m];$$
$$UB_i = UB_{i-1} - P(H_i) \cdot [\mu_M - \mu(H)].$$

По мере роста i , LB_i и UB_i приближаются к $\mu(G)$. Когда LB_i или UB_i достигает порога R_0 , можно сделать однозначный вывод о надёжности сети.

Подход был предложен J.-M. Won и F. Karraу в 2010 г. для вероятности связности СГ.

Улучшенные кумулятивные границы

В некоторых случаях удаётся уточнить кумулятивные границы зная возможные максимальные (M_i) и минимальные (m_i) значения показателя для оставшихся значений. Тогда

$$LB = \sum_{i=1}^k P(H_i)\mu(H_i) + m_k(1 - \sum_{i=1}^k P(H_i));$$

$$UB = \sum_{i=1}^k P(H_i)\mu(H_i) + M_k(1 - \sum_{i=1}^k P(H_i)).$$

$$LB_i = LB_{i-1} + P(H_i) \cdot [\mu(H_i) - m_i];$$

$$UB_i = UB_{i-1} - P(H_i) \cdot [M_i - \mu(H)].$$

Улучшенные кумулятивные границы (примеры)

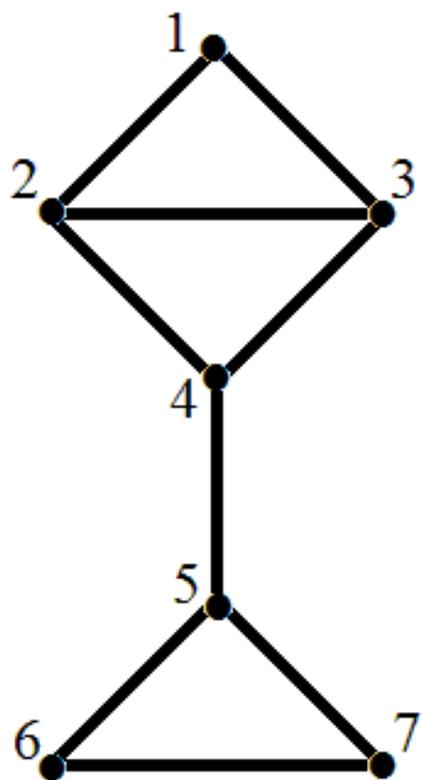
Для вероятности связности пары узлов: $m = p_i$, $M = 1 - \prod_{i=1}^{|E|} (1 - p_i)$.

Для максимального потока: $m = \min c_i$, $M = \text{next to max } \sum_{j \in \text{Neib}(i)} c_{ij}$.

Для математического ожидания числа связных пар узлов:

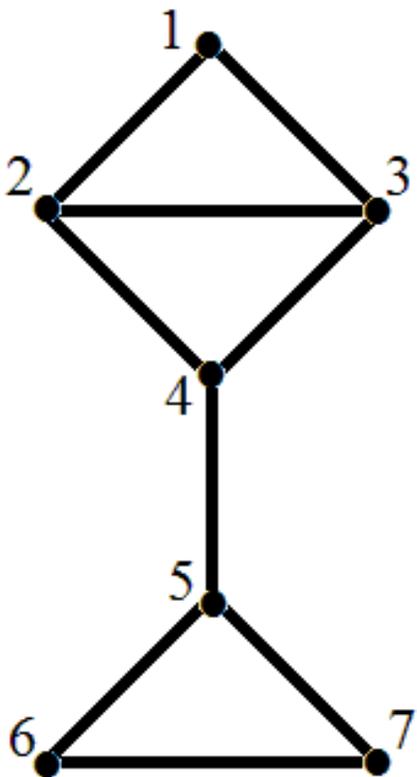
$$mM = \min \left\{ m, \sum_{i=1}^{|M|} C_{\text{Deg}(v_i)+1}^2 \right\}.$$

.....



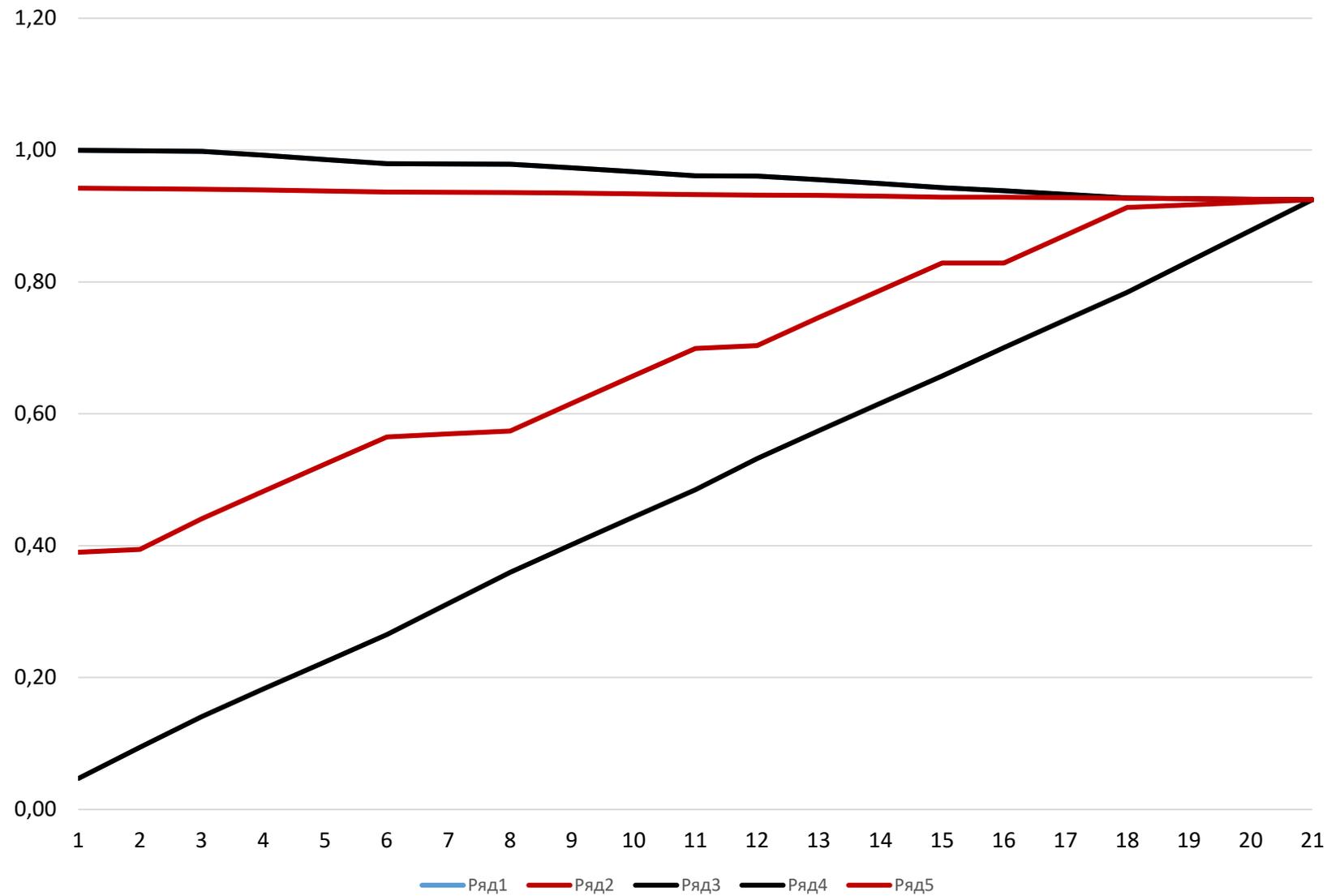
$$\forall i,j \ p_{ij}=0.9$$

i	j	R_{ij}	p_{ij}	M_i	Обычные границы		Улучшенные границы	
1	2	0,98829	0,9	0,99999	0,04706143	0,99944238	0,38991857	0,94215429
1	3	0,98829	0,9	0,99999	0,09412286	0,99888476	0,39412286	0,94159714
1	4	0,97848	0	0,99999	0,14071714	0,99786	0,44071714	0,94057286
1	5	0,880632	0	0,9	0,182652	0,99217581	0,482652	0,93965057
1	6	0,86389999	0	0,9	0,22379009	0,98569486	0,52379009	0,93793152
1	7	0,86389999	0	0,9	0,26492819	0,9792139	0,56492819	0,93621248
2	3	0,99639	0,9	0,99999	0,31237533	0,979042	0,56951819	0,93604105
2	4	0,98829	0,9	0,99999	0,35943676	0,97848438	0,57372248	0,9354839
2	5	0,889461	0	0,9	0,40179205	0,97322062	0,61607776	0,93498205
2	6	0,87256124	0	0,9	0,44334258	0,96715211	0,6576283	0,93367544
2	7	0,87256124	0	0,9	0,48489312	0,96108359	0,69917883	0,93236883
3	4	0,98829	0,9	0,99999	0,53195455	0,96052597	0,70338312	0,93181169
3	5	0,889461	0	0,9	0,57430983	0,95526221	0,7457384	0,93130983
3	6	0,87256124	0	0,9	0,61586037	0,9491937	0,78728894	0,93000322
3	7	0,87256124	0	0,9	0,6574109	0,94312519	0,82883947	0,92869662
4	5	0,9	0,9	0,9	0,70026805	0,93836328	0,82883947	0,92869662
4	6	0,8829	0	0,9	0,7423109	0,93278709	0,87088233	0,92788233
4	7	0,8829	0	0,9	0,78435376	0,9272109	0,91292519	0,92706805
5	6	0,981	0,9	0,999	0,83106805	0,92630614	0,91678233	0,9262109
5	7	0,981	0,9	0,999	0,87778233	0,92540138	0,92063947	0,92535376
6	7	0,981	0,9	0,999	0,92449662	0,92449662	0,92449662	0,92449662



$$\forall i,j \quad p_{ij}=0.9$$

Средняя вероятность связности пары узлов



Частичные суммы и кумулятивные границы

Представим себе, что каким-либо эффективным способом удаётся получить суммарное значение показателя для нескольких реализаций одновременно.

Тогда индекс у значения границы увеличивается более чем на единицу.

Например, для пар вершин цикла легко получаем сумму вероятностей парной связности:

$$S(C) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \left(\prod_{s=i}^{j-1} p_s + \prod_{s=1}^k p_s / \prod_{s=i}^{j-1} p_s - \prod_{s=1}^k p_s \right).$$

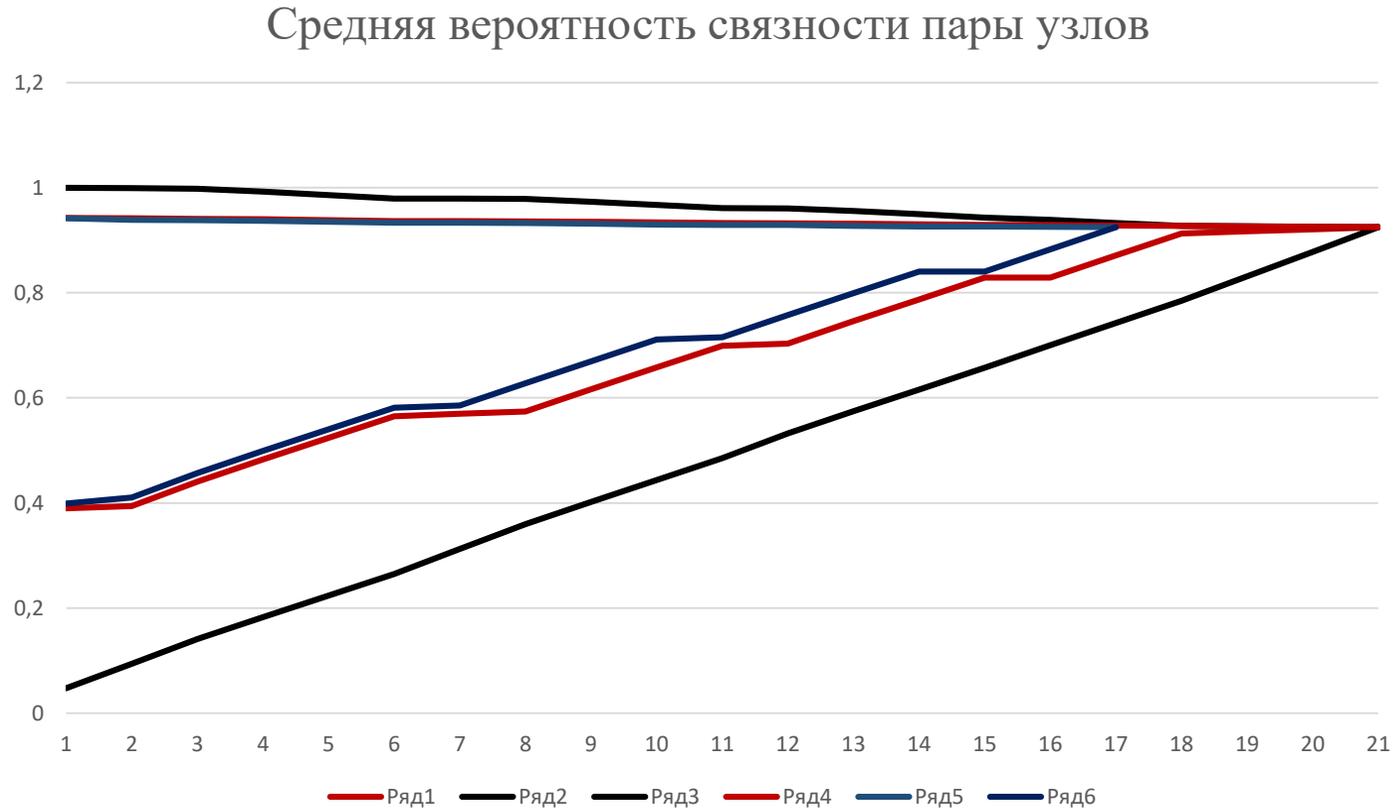
Менее очевидно получение суммы для пар, соединяющих произвольную вершину s с вершинами цепи:

$$\begin{aligned} \sum_{i=x}^y R_{si} &= R_{sy}(G \setminus Ch) \sum_{i=x}^y \left[\prod_{j=x}^{i-1} p_j - \prod_{j=x}^{y-1} p_j \right] + \\ &R_{sx}(G \setminus Ch) \sum_{i=x}^{y-1} \left[\prod_{j=i}^{y-1} p_j - \prod_{j=x}^{y-1} p_j \right] + kR_{s, \langle x, y \rangle}(G / Ch) \prod_{j=x}^{y-1} p_j. \end{aligned}$$

Для нашего примера:

$$S_1 = R_{56} + R_{57} + R_{67} = 2,943; S_2 = R_{12} + R_{13} + R_{23} = 2,97297.$$

Имеем:



Часть 4. Структурная ОПТИМИЗАЦИЯ

Применяемые методы

Независимо от выбора оптимизируемого показателя из списка, вычисление значения для конкретной структуры занимает значительное время, что делает невозможным полный перебор (соединение 20 узлов 25 связями требует рассмотрения 24 290 850 365 042 333 851 229 852 541 322 вариантов!!!).

Применяются эвристические методы, прежде всего варианты генетического алгоритма и алгоритма клонирования в их параллельном исполнении. Ноу хау – использование кумулятивных оценок при оценке пригодности особей.

Основные математические проблемы – представление данных и разработка операторов скрещивания и мутации, сохраняющих результат в рассматриваемом классе структур.

Thank you,
Any questions?

