

Решение конвективно-диффузионных уравнений разрывным методом Галеркина

1. Постановка задачи

Уравнениями конвективно-диффузионного типа описываются процессы, в которых присутствует конвективный перенос. Прикладные задачи такого рода встречаются во многих областях, таких как нефтеразведка, метеорология, океанография и т.д. В связи с практическим применением конвективно-диффузионных уравнений очень важна точность и устойчивость их решения. В последнее время разрывный метод Галеркина (DG (Discontinuous Galerkin) – метод) становится очень популярным, так как позволяет получать аппроксимации разрывных решений, используя идею численных потоков и ограничителей крутизны [1].

Рассмотрим краевую задачу конвекции – диффузии в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) + a \cdot \operatorname{grad} u &= f \quad \text{в } \Omega, \\ u|_{\Gamma} &= g, \end{aligned}$$

a - непрерывное векторное поле скорости, определенное на области $\bar{\Omega}$,

ε - коэффициент диффузии.

2. Вариационная постановка

Введем пространство

$$V_h^k = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_T \in P^k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

где P^k - это пространство полиномов степени меньше или равной k ($k \geq 0$),

\mathcal{T}_h - это регулярное семейство элементов T , образующих разбиение Ω .

Запишем вариационную постановку разрывного метода Галеркина в форме IP [2]:

найти $u_h \in V_h^k$ такое, что $\forall v_h \in V_h^k$ выполняется:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{T \in T_h} \int_T \nabla v_h \cdot (a u_h - \varepsilon \nabla u_h) d\Omega + \sum_{e \in E_h^0} \int_e [v_h] \cdot (a u_h^- - \varepsilon \nabla u_h^-) dS + \sum_{e \in \Gamma^+} \int_e v_h u_h a \cdot n dS + \\
& + \sum_{e \in E_h^0} \int_e \varepsilon^- \nabla v_h^- \cdot [u_h] dS + \sum_{e \in \Gamma} \int_e (\varepsilon \nabla v_h \cdot n u_h + \varepsilon \nabla u_h \cdot n v_h) dS + \sum_{e \in E_h} \int_e \frac{\langle \varepsilon \rangle}{h_\perp} [v_h] \cdot [u_h] dS = \\
& = \sum_{T \in T_h} \int_T v_h f d\Omega + \sum_{e \in \Gamma} \int_e \left(\frac{\langle \varepsilon \rangle}{h_\perp} v_h g + \varepsilon \nabla v_h \cdot n g \right) dS - \sum_{e \in \Gamma^-} \int_e a \cdot n v_h g dS,
\end{aligned} \tag{1}$$

где E_h - множество ребер элементов, E_h^0 - множество внутренних ребер, $\Gamma^- = \{x \in \Gamma : a(x) \cdot n(x) \leq 0\}$, $\Gamma^+ = \{x \in \Gamma : a(x) \cdot n(x) > 0\}$, для каждого $e \in E_h^0$ определим

$$h_\perp = \frac{\mu(T^+) + \mu(T^-)}{2\mu(e)}, \text{ где } \mu(z) - \text{мера } z.$$

Определим среднее: $\langle \varphi \rangle = \frac{1}{2}(\varphi^+ + \varphi^-)$ и скачок φ : $[\varphi] = \varphi^+ n^+ + \varphi^- n^- \quad \forall e \in E_h^0$, и

$$[\varphi] = \varphi n, \quad \langle \varphi \rangle = \varphi, \quad \forall e \in \Gamma.$$

3. Дискретная вариационная постановка

Рассмотрим прямоугольный конечный элемент $\Omega_{rs} = [x_r, x_{r+1}] \times [y_s, y_{s+1}]$, изображенный на рисунке 1. Определим на нем четыре локальные базисные функции первого порядка [3].

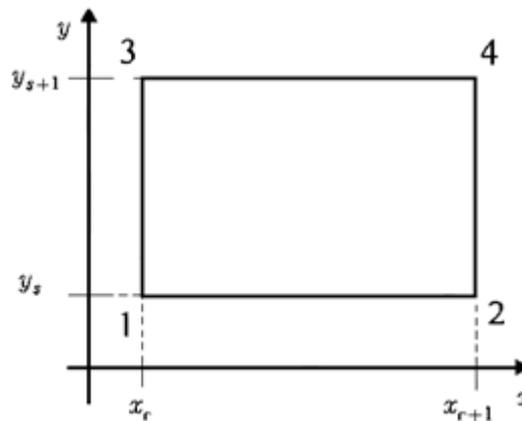


Рисунок 1 - Локальная нумерация узлов и базисных функций на прямоугольном конечном элементе

Билинейные базисные функции пространства V_h^k выберем из следующих соображений [4]:

$$\begin{aligned}\phi_j(T_{j-1}) &= \phi_j(T_{j+1}) = 0 \\ [\phi_j(T_j)] &= 1, \quad \{\phi_j(T_j)\} = 0 \\ (\phi_j, \vartheta)_T &= 0 \quad \forall \vartheta \in P_k(T)\end{aligned}$$

Этим условиям удовлетворяют следующие функции, изображенные на рисунке 2 в одномерном случае:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{x - x_{r+1}}{2h_x} \frac{y - y_{s+1}}{2h_y} & \phi_2 &= \frac{x - x_r}{2h_x} \frac{y - y_{s+1}}{2h_y} \\ \phi_3 &= \frac{x - x_{r+1}}{2h_x} \frac{y - y_s}{2h_y} & \phi_4 &= \frac{x - x_r}{2h_x} \frac{y - y_s}{2h_y}\end{aligned}$$

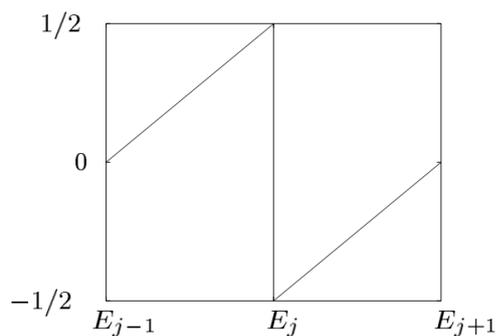


Рисунок 2 – Базисная функция, разрывная на ребре E_j , разделяющем два конечных элемента

Представим неизвестные в виде линейных комбинаций соответствующих базисных функций на каждом конечном элементе $T \in \mathcal{T}_h$

$$u = \sum_{j=1}^4 q_j \phi_j \quad (2)$$

Подставим выражение (2) в вариационное уравнение (1), выбирая в качестве v функции $\phi_i, i = 1..4$:

$$B_h \left(\sum_{j=1}^4 q_j \phi_j, \phi_i \right) = L_h (g, f; \phi_i)$$

где

$$B_h \left(\sum_{j=1}^4 q_j \phi_j, \phi_i \right) = \sum_{j=1}^4 q_j \left[- \int_T \nabla \phi_i \cdot (a \phi_j - \varepsilon \nabla \phi_j) d\Omega + \sum_{e \in E_h^0} \int_e [\phi_i] \cdot (a \phi_j^- - \varepsilon \nabla \phi_j^-) dS + \right. \\ \left. + \int_e s \varepsilon^- \nabla \phi_i^- \cdot [\phi_j] dS + \int_e (s \varepsilon \nabla \phi_i \cdot n \phi_j + \varepsilon \nabla \phi_j \cdot n \phi_i) dS + \right. \\ \left. + \sum_{e \in \Gamma^+} \int_e \phi_i \phi_j a \cdot n dS + \mathcal{G} \sum_{e \in E_h} \int_e \frac{\langle \varepsilon \rangle}{h_\perp} [\phi_i] \cdot [\phi_j] dS \right]$$

$$L_h (g, f; \phi_i) = \int_T \phi_i \sum_{j=1}^4 f_j \phi_j d\Omega + \sum_{e \in \Gamma} \int_e \left(\mathcal{G} \frac{\langle \varepsilon \rangle}{h_\perp} \phi_i \sum_{j=1}^4 g_j \phi_j + s \varepsilon \nabla \phi_i \cdot n \sum_{j=1}^4 g_j \phi_j \right) dS - \\ - \sum_{e \in \Gamma^-} \int_e a \cdot n \phi_i \sum_{j=1}^4 g_j \phi_j dS$$

4. Результаты вычислительных экспериментов на модельной задаче

$$-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} u = f, \Omega = [0,1] \times [0,1] \\ \varepsilon = 1, 10^{-3}, 10^{-5}, \vec{a} = (1,0)$$

Известно аналитическое решение, которое изображено на рисунке 3 в виде поверхности:

$$U = \frac{1}{4} U^* (\sin(4\pi x) + 2) \left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right) \left(1 - e^{-\frac{1-x}{\varepsilon}} \right) \left(1 - e^{-\frac{y}{\varepsilon}} \right) \left(1 - e^{-\frac{1-y}{\varepsilon}} \right) \\ U^* = \begin{cases} 3 - e^{\frac{2y-1}{2\varepsilon}}, & y < 0.5 \\ 1 + e^{\frac{1-2y}{2\varepsilon}}, & y > 0.5 \end{cases}$$

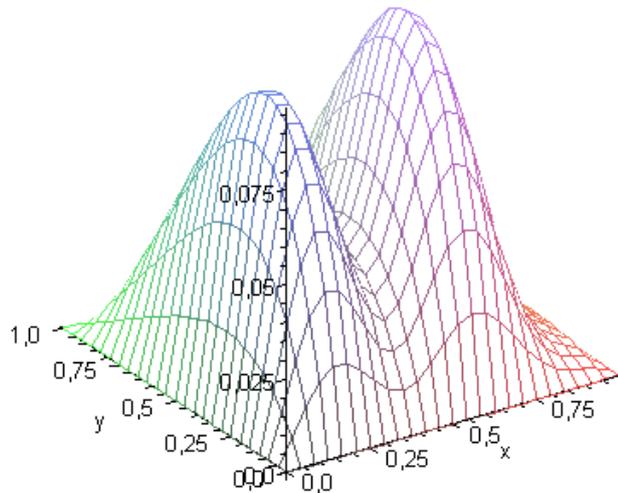


Рисунок 3 - Аналитическое решение при $\varepsilon = 1$

Вычисления проводилось на равномерной сетке 10×10 , шаг $h=0.1$. В таблице 1 приведены результаты тестирования алгоритма на вложенных сетках.

Таблица 1. Относительная погрешность полученного решения на вложенных сетках

ε	$\ e\ _h$	$\ e\ _{h/2}$	$\ e\ _{h/4}$	$\ e\ _h / \ e\ _{h/2}$
1	3.04284E-02	7.72215E-03	2.02653E-03	3,94
10^{-3}	8.48884E-02	2.49631E-02	1.04336E-02	3,4
10^{-5}	3.32912E-01	1.04035E-01	3.31692E-02	3,2

Разрывный метод Галеркина позволяет получить решение задачи с пограничными слоями на грубой сетке.

1. Решение конвективно-диффузионных уравнений разрывным методом Галеркина [Электронный ресурс] : тезисы доклада / Н. Б. Иткина. – Режим доступа: www.math.nsc.ru/conference/invconf/veku07/abstracts/mat_mod/itkina.pdf.
2. Discontinuous Galerkin methods for advection-diffusion-reaction problems / В. Ayuso, L.D. Marini // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2009. – №2. – С. 1391-1420.
3. Соловейчик, Ю.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач / Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, М.Г. Персова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с.

4. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems / D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 2002. – №5. – С. 1749-1779.