

Трехмерная численная модель релаксации электронного пучка в плазме*

Е. А. МЕСЯЦ, А. В. СНЫТНИКОВ

*Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*
e-mail: mesyats@gmail.com

Аннотация. На основе метода частиц в ячейках создана параллельная трехмерная численная модель, позволяющая моделировать процессы релаксации электронного пучка в плазме. Исследуется насыщение роста отдельно взятой неустойчивой моды в разных режимах, для каждого случая вычисляются инкременты неустойчивости и приводится сравнение с аналитическим решением.

Введение

Целью данной работы являлось создание трехмерной численной модели для исследования проблемы устойчивости и нагрева плазмы электронным пучком. В основе нашей модели лежит система дифференциальных уравнений, состоящая из кинетического уравнения Власова, в безразмерной форме имеющего вид

$$\frac{\partial f_{i,e}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{i,e}}{\partial r} + \kappa_{i,e}(E + [v, B]) \frac{\partial f_{i,e}}{\partial v} = 0, \quad (1)$$
$$\kappa_e = -1, \kappa_i = m_e/m_i,$$

и обезразмеренных уравнений Максвелла для полей

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \text{rot} B - j,$$
$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\text{rot} E,$$
$$\text{div} E = \rho,$$
$$\text{div} B = 0.$$

Здесь индексами i и e помечены величины, относящиеся к ионам и электронам соответственно; $f_{i,e}(t, r, p)$ – функция распределения частиц; $m_{i,e}, p_{i,e}, r_{i,e}$ – масса, импульс, положение иона или электрона; E, H – напряженности электрического и магнитного полей.

Скорость обезразмеривалась на скорость света c , время на $1/w_{pe}$.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 11-01-00249а и № 12-07-00065а.

1. Описание модели и постановка задачи

Для решения этой системы используется метод частиц в ячейках. Плазма представляется набором модельных частиц, траекториями движения которых являются характеристики уравнения Власова[1]

$$\frac{dp_{i,e}}{dt} = \kappa_{i,e}(E + [v, B]), \quad (2)$$

$$\frac{dr_{i,e}}{dt} = v_{i,e}, \quad p_{i,e} = \frac{v_{i,e}}{\sqrt{1 - v_{i,e}^2}}.$$

Решаются они по схеме с перешагиванием. Для решения уравнений Максвелла на сетке используется схема Ленгдона-Лозинского[2]. Плотности вычисляются по положениям частиц, токи из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} j = 0. \quad (3)$$

Рассматривается небольшая узкая область плазмы длины L и шириной в несколько ячеек с инжектированным немодулированным пучком. Начальное распределение частиц по скоростям максвелловское. Все частицы (электроны и ионы плазмы, а так же электроны пучка) распределены по области равномерно. Задаются плотность, температура плазмы и пучка. Пучок теплый, нерелятивистский, начальная средняя скорость пучка $v_0 = 0.2$.

Распараллеливание выполнено методом декомпозиции расчетной области по направлению, перпендикулярному направлению движения электронного пучка. Декомпозиция смешанная эйлерово-лагранжева.

Нас интересует развитие отдельно взятой неустойчивой моды, поэтому длина области выбрана небольшой, равной одной длине задаваемой волны. Граничные условия во всех направлениях периодические, поэтому из непрерывного спектра волновых чисел k вырезаются дискретные значения $k_l = 2\pi l/L$, из которых только основная мода с $k = 2\pi/L$ попадает в область большого инкремента.

2. Вычисление инкремента неустойчивости

В зависимости от разброса электронов пучка по скоростям различают несколько режимов неустойчивости: гидродинамический ($k\Delta v \ll \gamma$), переходный ($k\Delta v \sim \gamma$) и кинетический ($k\Delta v \gg \gamma$). Здесь γ – инкремент неустойчивости, Δv – разброс электронов пучка по скоростям.

На начальной стадии развития неустойчивости энергия электрического поля нарастает по экспоненте $Ee \sim e^{\gamma t}$. Поэтому инкремент неустойчивости можно вычислять как производную от логарифма энергии электрического поля

$$\gamma = \frac{\partial \ln Ee}{\partial t}. \quad (4)$$

Но данный способ вычисления инкремента неустойчивости не подходит для вычислений в кинетическом режиме. Сложность перехода от гидродинамического режима к

кинетическому режиму состоит в следующем. Когда разброс по скоростям электронов пучка увеличивается, а плотность пучка становится все меньше, во взаимодействии с возбуждаемой волной вступает все меньшая часть электронов пучка, время насыщения неустойчивости увеличивается. При этом амплитуда электрического поля уменьшается и при недостаточном количестве частиц становится по величине сравнима с численными шумами. Такие расчеты требуют большого количества частиц, что не всегда возможно обеспечить. Поэтому важно во-первых ответить на вопрос, сколько частиц в ячейке можно считать достаточным для вычислений, а во-вторых подобрать менее чувствительный к численным шумам способ вычисления инкремента неустойчивости.

В качестве такой диагностики был выбран расчет инкремента неустойчивости по амплитуде главной волны энергии напряженности электрического поля. Обозначим ее $ampl E$. Ниже на графиках приводится сравнение результатов расчетов инкремента неустойчивости по энергии и по амплитуде в трех режимах с аналитическим решением, описанным в [3] для одномерной задачи. Все расчеты проводились при следующих параметрах: сетка по пространству $100 \times 4 \times 4$, шаг по времени $\tau = 0.001$.

1) Гидродинамический режим.

Основные параметры: отношение плотности пучка к плотности плазмы $n_b/n_0 = 2 \times 10^{-3}$, разброс электронов пучка по скоростям $\Delta v/v_0 = 0.035$, длина области $L = 1.2566$. Таким образом $\gamma/k\Delta v = 2.06 > 1$.

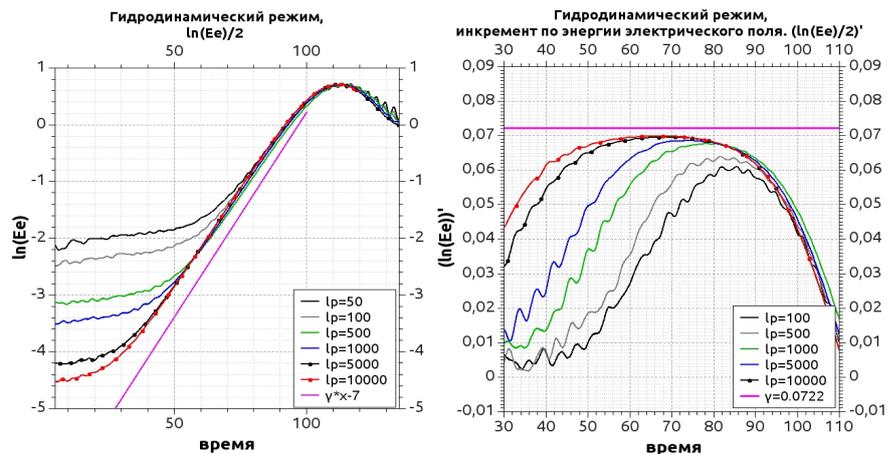


Рис. 1. Логарифм энергии электрического поля в зависимости от числа частиц в ячейке и производная логарифма энергии (инкремент). Гидродинамический режим.

Первый способ вычисления инкремента - вычисление производной от логарифма энергии электрического поля. При заданных параметрах величина инкремента неустойчивости по [3] должна быть $\gamma = 0.0722$. Здесь и далее розовым цветом на левом графике показан темп роста энергии в линейной стадии с аналитическим инкрементом. Для наглядности эта линия снесена немного вбок, максимумы графика энергии совмещены. На правом графике розовым цветом также показано точное значение инкремента. В начале на графиках видна одна из особенностей моделирования холодной плазмы методом частиц - саморазогрев модельной плазмы. Уровень этих шумов уменьшается с увеличением числа частиц. Хорошо видна сходимость по количеству частиц. Когда амплитуда волны становится больше уровня шумов, на графи-

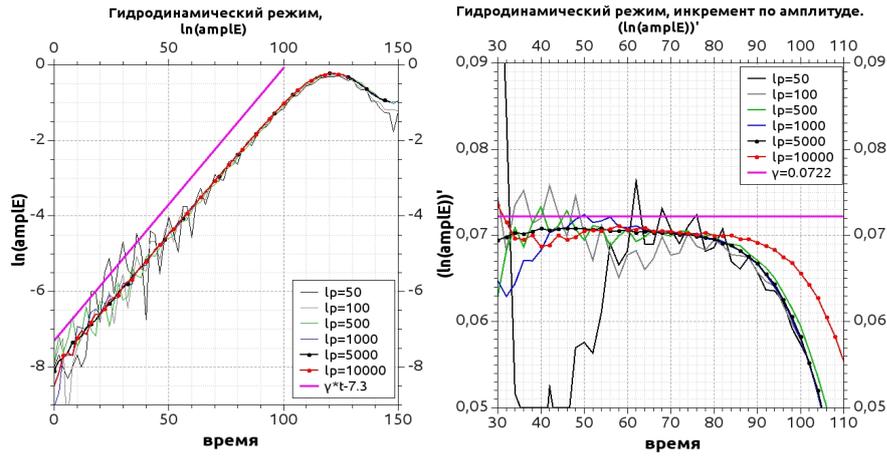


Рис. 2. Логарифм амплитуды в зависимости от числа частиц в ячейке и производная логарифма энергии(инкремент). Гидродинамический режим.

lp	$\gamma = \frac{\partial \ln(Ee)}{\partial t}$	ошибка (%)	$\gamma = \frac{\partial \ln(ampE)}{\partial t}$	ошибка (%)
50	0.0605	16	0.066	8.6
100	0.0635	12	0.068	5.8
500	0.0675	6.5	0.07	3
1000	0.0685	5.1	0.0713	1.2
5000	0.0697	3.5	0.071	1.6
10000	0.07	3	0.071	1.6

Таблица 1. Инкремент и ошибка в % в зависимости от к-ва частиц в ячейке, гидродинамический режим.

как можно видеть экспоненциальную стадию роста волны, по которой и вычисляется инкремент неустойчивости(правый график).

Второй способ вычисления инкремента - вычисление производной от логарифма амплитуды главной волны электрического поля. С помощью преобразования Фурье выбиралась волна с наибольшим инкрементом. Здесь, как видно из рис.2, уже не играют роли шумы от саморазогрева модельной плазмы, экспоненциальный рост начинается сразу. Более того, для той же точности вычисления инкремента можно использовать меньшее количество частиц.

В табл.1 приведено значение инкремента по энергии и по амплитуде, а также величина ошибки в процентах. В гидродинамическом случае ошибка по энергии примерно в 2 раза больше, чем по амплитуде. Из приведенных графиков, а также таблицы видно, что в гидродинамическом режиме достаточным можно считать число частиц в ячейке равное 50-100, если использовать вычисление инкремента по амплитуде. Ошибка в этом случае не превышает 10%.

2) *Переходный режим.*

Основные параметры: отношение плотности пучка к плотности плазмы $n_b/n_0 = 10^{-3}$, разброс электронов пучка по скоростям $\Delta v/v_0 = 0.14$, длина области $L = 1.1424$. Таким образом $\gamma/k\Delta v = 0.017 < 1$.

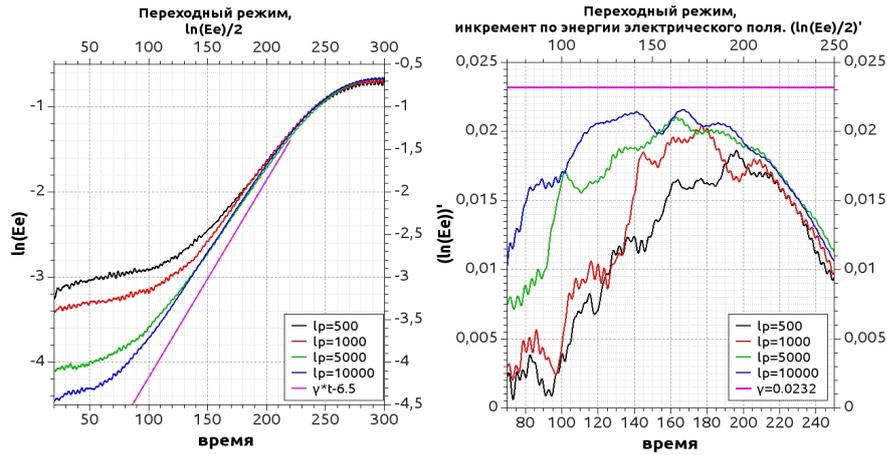


Рис. 3. Инкремент по энергии электрического поля в зависимости от числа частиц в ячейке. Производная логарифма энергии. Переходный режим.

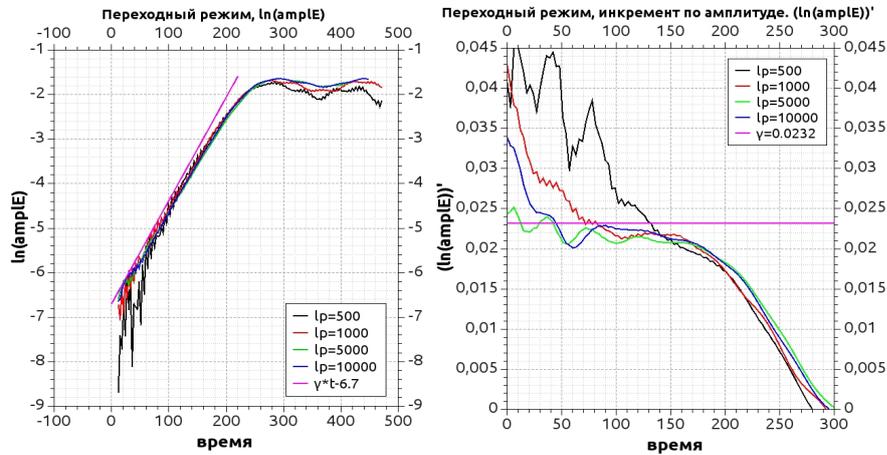


Рис. 4. Инкремент по амплитуде электрического поля в зависимости от числа частиц в ячейке. Производная логарифма энергии. Переходный режим.

Величина инкремента неустойчивости для этих параметров должна быть $\gamma = 0.0232$.

Здесь уже приходится использовать гораздо больше частиц в ячейке. Для того, чтобы ошибка была в пределах 10%, число частиц в ячейке должно быть не меньше 1000.

3) Кинетический режим. Основные параметры: отношение плотности пучка к плотности плазмы $n_b/n_0 = 2 \times 10^{-4}$, разброс электронов пучка по скоростям $\Delta v/v_0 = 0.14$, длина области $L = 1.1424$. Таким образом ($\gamma/k\Delta v = 0.15$).

В кинетическом режиме из-за шумов вычисление инкремента по энергии становится невозможным. Поэтому здесь показан только график амплитуды электрического поля. Аналитическое значение инкремента неустойчивости в этом случае $\gamma = 0.0027$.

В кинетическом режиме требуется гораздо больше частиц, чем в переходном, для вычисления инкремента. Инкремент по сравнению с переходным режимом уменьшился почти в 9 раз, время насыщения неустойчивости увеличилось примерно в 3

lp	$\gamma = \frac{\partial \ln(Ee)}{\partial t}$	ошибка (%)	$\gamma = \frac{\partial \ln(amplE)}{\partial t}$	ошибка (%)
500	0.0175	24.6	0.0205	11.6
1000	0.0197	15	0.0215	7.3
5000	0.0205	11.6	0.0216	6.9
10000	0.021	9.5	0.022	5

Таблица 2. Инкремент и ошибка в % в зависимости от к-ва частиц в ячейке, переходный режим.

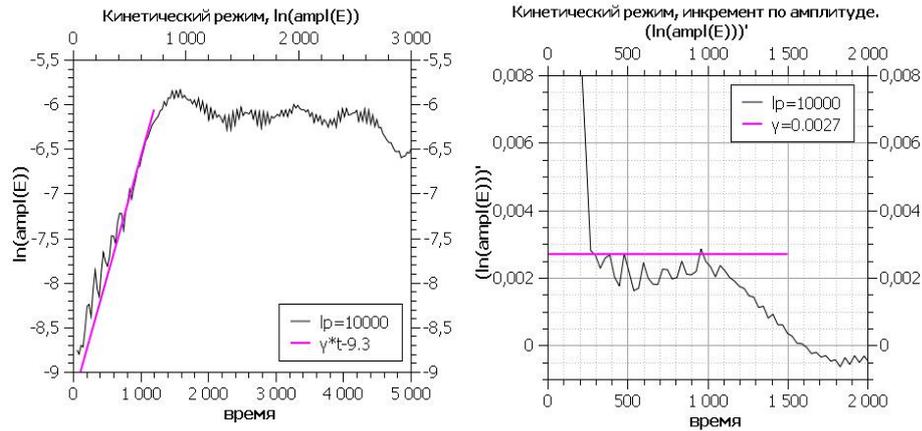


Рис. 5. Инкремент по амплитуде электрического поля в зависимости от числа частиц в ячейке. Производная логарифма энергии. Кинетический режим.

lp	$\gamma = \frac{\partial \ln(Ee)}{\partial t}$	ошибка (%)	$\gamma = \frac{\partial \ln(amplE)}{\partial t}$	ошибка (%)
10000	—	—	0.0021	22.2
20000	—	—	0.0022	18.5

Таблица 3. Инкремент и ошибка в % в зависимости от к-ва частиц в ячейке, кинетический режим.

раза, вычисление инкремента по энергии электрического поля становится невозможным. Но не смотря на это вычисление инкремента по амплитуде дает удовлетворительный результат.

Заключение

Создан полностью трехмерный численный код, позволяющая моделировать процессы релаксации теплового электронного пучка малой плотности в плазме. Показано, что вычисление инкремента по амплитуде напряженности электрического поля является достаточно чувствительной диагностикой, которая работает даже в кинетическом режиме, позволяя количественно оценить полученный результат. Для вычисления инкремента с ошибкой в 20% в гидродинамическом режиме достаточно использовать 50 частиц в ячейке, тогда как в кинетическом режиме потребуется брать около

20000 частиц в ячейке.

Список литературы

- [1] Р. Хокни, Дж. Иствуд, Численное моделирование методом частиц. Издательство "Мир Москва, 1987.
- [2] Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П. Численное моделирование методами частиц-в-ячейках. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2004.
- [3] Лотов К.В., Тимофеев И.В. Переходный режим одномерной двухпотоковой неустойчивости. Вестник НГУ. Серия: Физика. 2008. Т.3, вып. 1, с. 62-65.