# Численный алгоритм построения многочленов с заданными свойствами

Рыбков М.В., Новиков Е.А.
Институт вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск)

**Введение.** При численном исследовании жестких задач вида

$$y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0,\ t_0 \le t \le t_k \tag{1}$$

где $y$ и $f$ – гладкие вещественные $N$-мерные вектор функции, $t$ – независимая переменная, все большее внимание привлекают явные методы [1–4]. Это связано с тем, что при применении $L$-устойчивых методов возникает проблема с обращением матрицы Якоби. В случае большой размерности системы дифференциальных уравнений время декомпозиции данной матрицы фактически определяет общие вычислительные затраты. В то же время явные методы не нуждаются в вычислении матрицы Якоби и, если жесткость задачи не слишком велика, то они будут предпочтительнее. Отметим, что явные методы легко распараллеливаются. Можно выделить две основные причины, которые приводят к трудностям при использовании явных методов для решения жестких задач. Первая причина связана с противоречием между точностью и устойчивостью численной схемы на участке установления. Следствием этого является раскачивание шага интегрирования, что в лучшем случае приводит к понижению эффективности алгоритма интегрирования. Этого недостатка можно избежать, например, предложенным в [2, 5] способом контроля устойчивости. Вторая причина ограниченного применения явных методов связана с тем, что области устойчивости известных численных схем слишком малы. В настоящий момент имеется ряд работ, посвященных вопросам построения явных методов с расширенными областями устойчивости. Здесь разработан алгоритм определения коэффициентов полиномов устойчивости, при которых метод имеет заданную форму и размер области устойчивости. Построенные многочлены можно применять для повышения эффективности известных методов типа Рунге-Кутта и для построения алгоритмов интегрирования с расширенными областями устойчивости.

**Явные методы типа Рунге-Кутта.** Для численного решения жестких задач в [2] предлагается применять явные методы вида

$$y_{n+1} = y_n + \sum\nolimits_{i=1}^{m} p_{mi} k_i\ ,\ k_i = hf(t_n + \alpha_i h, y_n + \sum\nolimits_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j\ )\ , \tag{2}$$

где $k_i$, $1 \le i \le m$, – стадии метода, $p_{mi}$, $\alpha_{ij}$ и $\beta_{ij}$ – коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости схемы (2). Для упрощения выкладок далее рассмотрим задачу Коши для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(y)\ ,\ y(t_0) = y_0\ ,\ t_0 \le t \le t_k\ , \tag{3}$$

для решения которой применим методы вида

$$y_{n,i} = y_n + \sum\nolimits_{j=1}^{i} \beta_{i+1,j} k_j\ ,\ 1 \le i \le m-1,\ y_{n+1} = y_n + \sum\nolimits_{i=1}^{m} p_{mi} k_i\ , \tag{4}$$

где $k_i = hf(y_{n,i-1})$, $1 \le i \le m$, $y_{n,0} = y_n$. Все полученные ниже результаты можно использовать для неавтономных задач, если в (2) положить

$$\alpha_1 = 0\,,\ \alpha_i = \sum\nolimits_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}\,,\ 2 \le i \le m\,. \tag{5}$$

**Условия порядка.** Ниже потребуется матрица $B_m$ с элементами $b_{ij}$ [1–2]

$$\begin{gathered} b_{1i} = 1,\ 1 \le i \le m\,, \\ b_{ki} = 0,\ 2 \le k \le m,\ 1 \le i \le k-1, \\ b_{ki} = \sum\nolimits_{j=k-1}^{i-1} \beta_{ij} b_{k-1,j}\,,\ 2 \le k \le m,\ k \le i \le m\,, \end{gathered} \tag{6}$$

где $\beta_{ij}$ – коэффициенты схемы (2) или (4). Устойчивость одношаговых методов обычно исследуется на линейном скалярном уравнении

$$y' = \lambda y\,,\ y(0) = y_0\,,\ t \ge 0 \tag{7}$$

с комплексным $\lambda$, $\mathrm{Re}(\lambda)<0$. Применяя вторую формулу (4) к (7), получим

$$y_{n+1} = Q_m(z) y_n,\ z = h\lambda,\ Q_m(z) = 1 + \sum_{i=1}^{m} c_{mi} z^i,\ c_{mi} = \sum_{j=i}^{m} b_{ij} p_{mj},\ 1 \le i \le m. \tag{8}$$

Обозначая $C_m=(c_{m1}, \ldots, c_{mm})^T$ и $P_m=(p_{m1}, \ldots, p_{mm})^T$, последнее соотношение (8) можно переписать в виде

$$B_m P_m = C_m, \tag{9}$$

где элементы матрицы $B_m$ определены соотношениями (6). Для промежуточных численных схем (4) имеем

$$y_{n+1} = Q_m(z) y_n\,,\ z = h\lambda\,,\ Q_m(z) = 1 + \sum\nolimits_{i=1}^{m} c_{mi} z^i\,,\ c_{mi} = \sum\nolimits_{j=i}^{m} b_{ij} p_{mj}\,,\ 1 \le i \le m\,. \tag{10}$$

Используя обозначения $\beta_k=(\beta_{k+1,1}, \ldots, \beta_{k+1,k})^T$ и $c_k=(c_{k1}, \ldots, c_{kk})^T$ получим, что коэффициенты $\beta_{ij}$ промежуточных схем (4) и коэффициенты соответствующих многочленов устойчивости связаны соотношениями

$$B_k \beta_k = c_k, \quad 1 \le k \le m-1. \tag{11}$$

Заметим, что из сравнения (6) и (10) следует, что $b_{ki}=c_{i-1,k-1}$, то есть элементы $(k+1)$-го столбца матрицы $B_m$ совпадают с коэффициентами многочлена устойчивости $Q_k(z)$. Отсюда следует, что если заданы коэффициенты многочленов устойчивости основной и промежуточной численных схем, то коэффициенты методов (4) однозначно определяются из линейных систем (9) и (11) с верхними треугольными матрицами $B_i$, $1 \le i \le m$.

Разлагая точное и приближенное решения в ряды Тейлора по степеням $h$, можно записать

$$\begin{gathered} y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf + h^2 f'f/2 + h^3 [f''f^2 + f'^2 f]/6 + O(h^4)\,, \\ y_{n+1} = y_n + (\sum\nolimits_{j=1}^{m} b_{1j} p_{mj}) h f_n + (\sum\nolimits_{j=2}^{m} b_{2j} p_{mj}) h^2 f'_n f_n + \\ + (\sum\nolimits_{j=3}^{m} b_{3j} p_{mj}) h^3 f'^2_n f_n + 0.5 (\sum\nolimits_{j=2}^{m} b_{2j}^2 p_{mj}) h^3 f''_n f_n^2 + O(h^4)\,, \end{gathered} \tag{12}$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном $y(t_n)$ и приближенном $y_n$ решениях, соответственно. Из сравнения соотношений (12) при условии $y_n=y(t_n)$ видно, что численная формула (4) будет иметь первый порядок точности, если

$$\sum\nolimits_{j=1}^{m} b_{1j} p_{mj} = 1\,.$$

Требование второго порядка точности (4) означает выполнение условий

$$\sum\nolimits_{j=1}^{m} b_{1j} p_{mj} = 1,\ \sum\nolimits_{j=2}^{m} b_{2j} p_{mj} = 0.5\,.$$

Наконец схема (4) будет иметь третий порядок, если дополнительно выполняются еще два соотношения

$$\sum\nolimits_{j=3}^{m} b_{3j} p_{mj} = 1/6\,,\ \sum\nolimits_{j=2}^{m} b_{2j}^{2} p_{mj} = 1/3\,. \tag{13}$$

Отсюда следует, что для построения $m$-стадийных методов первого и второго порядков точности в линейной системе (9) следует положить $c_{m1}$=1 и $c_{m1}$=1, $c_{m2}$=0.5, соответственно. Задача о построении $m$-стадийных методов третьего порядка сводится к совместному решению линейной системы (9) и второго уравнения (13) при условии $c_{m1}$=1, $c_{m2}$=0.5, $c_{m3}$=1/6. Учитывая, что $c_{2j}=\alpha_j$, $2\leq i\leq m$, нетрудно видеть, что совместность (9), (13) эквивалентна совместности соотношений

$$\sum\nolimits_{j=2}^{m} \alpha_{j} p_{mj} = 1/2\,,\ \sum\nolimits_{j=2}^{m} \alpha_{j}^{2} p_{mj} = 1/3\,. \tag{14}$$

где $\alpha_j$, $2\leq i\leq m$, определены формулами (5).

Для того чтобы воспользоваться соотношениями (9) и (11) требуются коэффициенты многочленов устойчивости. Функция устойчивости явного $m$-стадийного метода типа Рунге-Кутта представляет собой полином степени $m$. Через заданные коэффициенты схемы (4) можно вычислить коэффициенты этого многочлена по формуле (9). Здесь рассмотрим задачу получения таких коэффициентов многочлена устойчивости, чтобы область устойчивости схемы имела заданную, естественно "разумную", форму и размер.

**Многочлены устойчивости на интервале [γ,0].** Пусть заданы два числа $k$ и $m$, $k\leq m$. Рассмотрим многочлены вида

$$Q_{m,k}(x) = 1 + \sum\nolimits_{i=1}^{k} c_i x^i + \sum\nolimits_{i=k+1}^{m} c_i x^i\,, \tag{15}$$

где коэффициенты $c_i$, $1\leq i\leq k$, заданы, а $c_i$, $k+1\leq i\leq m$, − свободные. Обычно $c_i$, $1\leq i\leq k$, определяются из требований аппроксимации. Поэтому для определенности ниже будем предполагать, что $c_i=1/i!$, $1\leq i\leq k$.

Обозначим экстремальные точки (15) через $x_1$, … , $x_{m-1}$, причем $x_1>x_2>\ldots>x_{m-1}$. Неизвестные коэффициенты $c_i$, $k+1\leq i\leq m$, определим из условия, чтобы многочлен (15) в экстремальных точках $x_i$, $k\leq i\leq m-1$, принимал заданные значения, то есть

$$Q_{m,k}(x_i) = F_i,\ k\leq i\leq m-1, \tag{16}$$

где $F(x)$ есть некоторая заданная функция, $F_i=F(x_i)$. Для этого на $x_i$, $k\leq i\leq m-1$, и $c_j$, $k+1\leq j\leq m$, рассмотрим следующую алгебраическую систему уравнений

$$Q_{m,k}(x_i) = F_i,\ Q'_{m.k}(x_i) = 0,\ k\leq i\leq m-1,\ Q'_{m.k} = \sum\nolimits_{i=1}^{m} i c_i x^{i-1}\,. \tag{17}$$

Перепишем (17) в виде, удобном для расчетов на ЭВМ. Для этого обозначим через $y$, $z$, $g$ и $r$ векторы с координатами

$$y_i = x_{k+i-1},\ z_i = c_{k+i},\ \ g_i = F_{k+i-1} - 1 - \sum\nolimits_{j=1}^{k} c_j y_i^j\,,$$

$$r_i = -\sum\nolimits_{j=1}^{k} j c_j y_i^{j-1},\ 1\leq i\leq m-k\,, \tag{18}$$

через $E_1,\ldots,E_5$ − диагональные матрицы с элементами на диагонали вида

$$e_1^{ii} = k + i,\ e_2^{ii} = 1/y_i,\ e_3^{ii} = \sum\nolimits_{j=1}^{k} jc_j y_i^{j-1} + \sum\nolimits_{j=1}^{m-k} (k+j) z_j y_i^{k+j-1},$$
$$e_4^{ii} = \sum\nolimits_{j=2}^{k} j(j-1) c_j y_i^{j-2} + \sum\nolimits_{j=1}^{m-k} (k+j)(k+j-1) z_j y_i^{k+j-2}, \qquad (19)$$
$$e_5^{ii} = (-1)^{k+i-1},\quad 1 \le i \le m-k,$$
а через $A$ – матрицу с элементами $a^{ij} = y_i^{k+j}$, $1 \le i, j \le m-k$. Заметим, что компоненты векторов (18), матриц (19) и $A$ зависят от чисел $m$ и $k$, причем
$$g = g(y), r = r(y), E_2 = E_2(y), E_3 = E_3(y,z), E_4 = E_4(y,z), A = A(y).$$
Индексы и аргументы опущены для упрощения записи. С использованием введенных обозначений задачу (17) можно записать в виде
$$Az - g = 0,\ E_2 A E_1 z - r = 0. \qquad (20)$$

Система (20) плохо обусловлена, что приводит к определенным трудностям при использовании для ее решения метода простой итерации. Для сходимости метода Ньютона требуются хорошие начальные условия, что в данном случае есть трудновыполнимая проблема. Если в (17) положить $F_i=(-1)^i$, $k \le i \le m-1$, то есть поставить задачу нахождения полинома с максимальным размером интервала устойчивости, то вопрос о вычислении начального условия $y^0$ решается достаточно просто с использованием значений экстремальных точек многочлена Чебышева, рассматриваемого на отрезке $[-2m^2,0]$, где $m$ есть степень (15). Их можно вычислить по формуле
$$y_i = m^2[\cos(i\pi/m) - 1],\ 1 \le i \le m-1. \qquad (21)$$
Подставляя (21) в первую формулу (20), получим коэффициенты полинома Чебышева, для которого $|Q_{m1}(x)| \le 1$ при $x \in [-2m^2,0]$ $x \in [-2m^2,0]$. При любом $k$ в качестве начальных условий можно взять (21) и, как показывают расчеты, имеется хорошая сходимость. Если же $F_i \ne (-1)^i$, $k \le i \le m-1$, то выбор начальных условий является, вообще говоря, искусством.

Опишем способ решения (20), который не нуждается в хороших начальных условиях. Для численного решения (20) используем метод установления, который заключается в том, что для стационарной задачи строится нестационарный процесс, решение которого с течением времени устанавливается к решению исходной задачи. Итак, рассмотрим задачу Коши
$$y' = E_5(E_2 A E_1 A^{-1} g - r),\ y(0) = y_0, \qquad (22)$$
где элементы матрицы $E_5$ определены в (19). Ясно, что после определения стационарной точки (22) коэффициенты полинома устойчивости можно вычислить из первой системы (20). Заметим, что при использовании матрицы $E_5$ все собственные числа матрицы Якоби задачи (22) имеют отрицательные вещественные части, то есть задача (22) устойчивая. Из результатов расчетов следует, что (22) является жесткой задачей. Методы решения таких задач предполагают вычисление матрицы Якоби, что в случае (22) связано с трудностями. Поэтому для ее решения используем метод второго порядка точности с численным вычислением и замораживанием матрицы Якоби [7−8], который применительно к задаче $y'=f(y)$, $y(0)=y_0$, имеет вид

$$y_{n+1}=y_n+ak_1+(1-a)k_2,\; D_n=E-ah_nA_n,$$
$$D_nk_1=h_nf(y_n), D_nk_2=k_1. \tag{23}$$

Здесь $a$=1−0.5√2, $k_1$ и $k_2$ − стадии метода, $E$ − единичная матрица, $h_n$ − шаг интегрирования, $A_n$ − матрица, представимая в виде $A_n=f_n'+h_nR_n+O(h_n^2)$, $f_n'=\partial f(y_n)/\partial y$ − матрица Якоби системы (1), $R_n$ − не зависящая от шага интегрирования произвольная матрица. Так как при записи схемы (23) матрица $R_n$ произвольная, то вопрос о замораживании и численной аппроксимации матрицы Якоби можно рассматривать одновременно [9]. Для контроля точности схемы (23) можно применять неравенство

$$\varepsilon(j_n)=\| D_n^{1-j_n}(k_2-k_1)\| \le a\varepsilon/|a-1/3|,\; 1\le j_n\le 2, \tag{24}$$

где $\varepsilon$ – требуемая точность интегрирования, $\|\cdot\|$ – некоторая норма в $R^N$, а целочисленная переменная $j_n$ выбирается наименьшей, при которой выполняется неравенство (24). Шаг численного дифференцирования $s_j$, $1\le j\le N$, выбирается по формуле $s_j=\max\{10^{-14}, 10^{-7}|y_j|\}$.Теперь $j$-й столбец $a_n^j$ матрицы $A_n$ вычисляется по формуле

$$a_n^j=[f(y_1,\ldots,y_j+s_j,\ldots,y_N)-f(y_1,\ldots,y_j,\ldots,y_N)]/s_j, 1\le j\le N, \tag{25}$$

то есть для задания $A_n$ требуется $N$ вычислений правой части задачи (22). Попытка использования прежней матрицы $D_n$ осуществляется после каждого успешного шага интегрирования. Для того чтобы не испортить свойства устойчивости численной схемы, при замораживании матрицы $D_n$ величина шага интегрирования тоже остается постоянной. Размораживание матрицы происходит в следующих случаях: 1) нарушена точность расчетов, 2) число шагов с замороженной матрицей достигло заданного максимального числа $I_h$, 3) прогнозируемый шаг больше последнего успешного в $Q_h$ раз.

**Результаты расчетов.** Опишем результаты численного эксперимента по определению влияния функции $F$ на размер и форму области устойчивости. Из анализа графических изображений областей устойчивости следует, что форма, размер и структура области устойчивости зависят от расположения корней многочлена устойчивости (15) в комплексной плоскости $\{h\lambda\}$. На расположение корней можно влиять выбором функции $F$. При решении задач, собственные числа матрицы Якоби которых имеют большие мнимые части и решения которых носят осциллирующий характер, часто не требуется значительное расширение интервала устойчивости. В этом случае шаг из условия точности выбирается достаточно малым, и поэтому расширение области устойчивости требуется в основном по мнимой оси. В случае наличия чисто мнимых собственных чисел нужно, чтобы на некотором участке мнимой оси выполнялось условие $|Q_{mk}(x)|=1$. При повышении порядка точности, то есть с ростом $k$, это условие выполняется само собой. Для методов низкого порядка расширения области устойчивости по мнимой оси можно добиться за счет выбора коэффициентов $c_i$, $k+1\le i\le m$, таким образом, чтобы корни многочлена устойчивости были комплексными. В случае нечетного числа $m$ один корень обязательно действительный. В зависимости от того, как он расположен относительно комплексных корней, изменяется размер, форма и структура области устойчивости. Нетрудно показать, что с ростом $m$ коэффициенты многочлена устойчивости стремятся к нулю. В [2] коэффициенты $c_i$, $k+1\le i\le m$, получены до $m=13$.

**Многочлены устойчивости на интервале [−1,1].** В настоящее время разрабатывается алгоритм построения многочленов с заданными свойствами на промежутке [−1,1]. В этом случае коэффициенты $c_i$ растут не так быстро, и можно построить многочлены при достаточно больших значениях $m$. Ниже описан алгоритм построения многочленов, которые соответствуют методам первого порядка точности. Обозначим через $\gamma_m$ длину интервала устойчивости $m$-стадийной явной формулы типа Рунге-Кутта, то есть на интервале $[\gamma_m,0]$ выполняется условие $|Q_{m,k}(x)|\le 1$. Тогда заменой переменных $x=1-2z/\gamma_m$ переведем интервал $[\gamma_m,0]$ в [−1,1]. При этом получим многочлен

$$Q_m(z)=\sum_{i=0}^{m} d_i z^i . \qquad (26)$$

Тогда коэффициенты $d_i$, $0\le i\le m$ многочлена (26) связаны с коэффициентами $c_i$, $0\le i\le m$, многочлена (15) связаны соотношением

$$c=UVd, \qquad (27)$$

где $d=(d_0, \ldots, d_m)^T$, $c=(c_0, \ldots, c_m)^T$, матрица $U$ − диагональная матрица с элементами на главной диагонали вида

$$u^{ii}=(-2/\gamma_m)^{i-1},\ 1\le i\le m+1,$$

а элементы $v^{ij}$ матрицы $V$ задаются формулами

$$v^{1j}=1,\ 1\le j\le m+1;\ v^{ij}=v^{i,j-1}+v^{i-1,j-1},\ 2\le i\le j\le m+1;\ v^{ij}=0,\ i>j.$$

Нетрудно видеть, что $V$ представляет собой «треугольник Паскаля», элементы которого легко вычисляются по рекуррентной формуле. Поэтому после построения многочлена (26) на интервале [–1,1], с помощью (27) легко вычислить коэффициенты многочлена (15).

Теперь перейдем к построению многочлена (26). Обозначим экстремальные точки (26) через $z_1, \ldots, z_{m-1}$, причем $z_1 > z_2 > \ldots > z_{m-1}$. Коэффициенты $d_i$, $0\le i\le m$, определим из условия, чтобы многочлен (26) в экстремальных точках $z_i$, $1\le i\le m-1$, принимал заданные значения, то есть

$$Q_m(z_i)=F_i,\ 1\le i\le m-1,$$

где $F(x)$ есть некоторая заданная функция, $F_i=F(z_i)$. Для этого на $z_i$, $1\le i\le m-1$, и $d_j$, $0\le j\le m$, рассмотрим следующую алгебраическую систему уравнений

$$Q_m(z_i)=F_i,\ Q'_m(z_i)=0,\ 1\le i\le m-1;\ Q'_m(z)=\sum_{i=1}^{m} i d_i z^{i-1}, \qquad (28)$$

причем выполнены условия нормировки $Q_m(-1)=(-1)^m$ и $Q_m(1)=1$.
Перепишем (28) в виде, удобном для расчетов на ЭВМ. Для этого обозначим через $y$, $w$, $g$ и $r$ векторы с координатами

$$y_j=z_j,\ r_j=0,\ 1\le j\le m-1;\ w_i=d_{i-1},\ 1\le i\le m+1;$$

$$g_i=F_i,\ 1\le i\le m-1;\ g_i=1,\ i=m;\ g_i=(-1)^m,\ i=m+1; \qquad (29)$$

через $E_1$, $E_2$ – соответственно матрицы размерности $(m+1)\times(m+1)$ и $(m-1)\times(m+1)$ с элементами на главной диагонали вида

$$e_1^{jj}=j-1,\ 1\le j\le m+1;\ e_2^{ii}=1/y_i,\ 1\le i\le m-1, \qquad (30)$$

а через $A$ – матрицу размерности $(m+1)\times(m+1)$ с элементами

$$a^{ij} = y_i^{j-1},\ 1 \le i \le m-1,\ 1 \le j \le m+1;\ a^{m,j} = 1,\ a^{m+1,j} = (-1)^{j+1},\ 1 \le j \le m+1. \quad (31)$$

С использованием (29) – (31) задачу (28) можно записать в виде

$$Aw - g = 0,\ E_2 A E_1 w - r = 0. \quad (32)$$

Для численного решения (32) используется метод установления, описанный выше. Определив коэффициенты многочлена (26), с помощью соотношения (27) вычисляем коэффициенты многочлена (15). Значение $\gamma_m$ находим из условия, что искомый многочлен соответствует методу интегрирования первого порядка точности, то есть имеет место $c_1$=1. Выписав вторую строку соотношения (27) и сделав необходимые алгебраические преобразования, получим

$$\gamma_m = -2\sum_{j=1}^{m+1} v_{2j} d_j \ / c_1.$$

**Заключение.** С помощью описанной схемы получены коэффициенты многочленов до степени $m$=20, соответствующих методам первого порядка точности. В настоящее время создается алгоритм построения многочленов, соответствующих методам произвольного порядка точности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00106).

Литература:

[1] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.

[2] Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997.

[3] Новиков Е.А., Шорников Ю.В. Компьютерное моделирование жестких гибридных систем / Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012, 451с.

[4] Лебедев В.И. Явные разностные схемы с переменными шагами по времени для решения жестких систем уравнений // Препринт ОВМ АН СССР №177. − 1987.

[5] Новиков В.А., Новиков Е.А. Контроль устойчивости явных одношаговых методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР, 1984. Т. 277, №5. С. 1058−1062.

[6] Новиков А.Е., Новиков Е.А. Алгоритм переменного порядка и шага на основе стадий метода Дорманда-Принса восьмого порядка точности // Вычислительные методы и программирование, 2007. Т.8, №2. С. 317−325.

[7] Новиков А.Е., Новиков Е.А. L-устойчивый (2,1)-метод решения жестких неавтономных задач// Вычислительные технологии, 2008. №13. С.477−482.

[8] Новиков Е.А., Шитов Ю.А. Алгоритм интегрирования жестких систем на основе (m,k)-метода второго порядка точности с численным вычислением матрицы Якоби // Препринт ВЦ СО АН СССР №20, Красноярск. 1988. 23с.

[9] Новиков А.Е., Новиков Е.А. Численное решение жестких задач с небольшой точностью // Матем. моделирование, 2010. Т.22, №1. С. 46−56.