Рассмотрим уравнение Фоккера - Планка

$$\frac{\partial w}{\partial t} + x\frac{\partial w}{\partial y} = D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ t > 0,\ 0 < x < r,\ 0 < y < 1, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = u_1, \tag{2}$$

$$w\big|_{x=r} = u_0, \tag{3}$$

$$w(x,0,t) = pw(x,1,t), \tag{4}$$

Пусть $w = w(x,y,t)$ характеризует рост числа клеток как функция времени t, x - скорость созревания, y - степень созревания клетки; $D > 0$ – коэффициент диффузии, $u_0, u_1 \geq 0$ - заданные константы [1]. Впервые использовать уравнение (1) при построении моделей роста клеточных популяций предложил М. Ротенберг в 1983 году.

Независимые от времени t решения $u = u(x,y)$ уравнения (1) удовлетворяют уравнению

$$x\frac{\partial u}{\partial y} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < r,\ 0 < y < 1 \tag{5}$$

и, в силу (2)-(4), условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u_1,\ 0 \leq y \leq 1, \tag{6}$$

$$u\big|_{x=r} = u_0,\ 0 \leq y \leq 1, \tag{7}$$

$$u(x,0) = pu(x,1),\quad 0 \leq x \leq r. \tag{8}$$

Уравнение (5) заменой $\tau = Dy$ сводится к уравнению

$$x\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ 0 < x < r,\ 0 < \tau < D, \tag{9}$$

с условиями

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = v_1,\ 0 \leq \tau \leq D, \tag{10}$$

$$v\big|_{x=r} = v_0,\ 0 \leq \tau \leq D, \tag{11}$$

$$v(x,0) = pv(x,1),\quad 0 \leq x \leq r, \tag{12}$$

где $v(x,\tau) = u\left(x, \frac{\tau}{D}\right)$, $v_1 = u_1$, $v_0 = u_0$.

Автомодельные решения уравнения (9) найдем методом Фурье. Получим два уравнения

$$Y' - \lambda Y = 0, \tag{13}$$

$$X'' - \lambda x X = 0, \tag{14}$$

с условиями

$$X'(0) = v_1, X(r) = v_0, \tag{15}$$

$$Y(0) = pY(1). \tag{16}$$

где $\lambda = \mathrm{const}$.

Учитывая (16), отличное от нуля решение уравнения (13) находим в виде

$$Y(\tau) = Ce^{\lambda\tau},\ \lambda = -\ln p, \tag{17}$$

где C - произвольная постоянная.

Пусть $p = 1/e$, тогда уравнение (14)имеет вид

$$X'' - xX = 0. \tag{18}$$

Решение уравнения (18) представимо в виде

$$X(x) = C_1 Ai(x) + C_2 Bi(x), \tag{19}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные, $Ai(x)$ и $Bi(x)$ - функции Эйри.

Удовлетворяя решение (19) условиям (15), получим систему

$$C_1 Ai'(0) + C_2 Bi'(0) = v_1, \tag{20}$$

$$C_1 Ai(r) + C_2 Bi(r) = v_0. \tag{21}$$

В силу принципа экстремума решение задачи (15) для уравнения (18) единственно. Определитель системы (20), (21)отличен от нуля. Определив постоянные C_1 и C_2 однозначным образом из этой системы, находим $X(x)$. Тогда решение задачи (10)-(12) для уравнения (9) определится формулой $v(x,\tau) = X(x)Y(\tau)$, а решение задачи (6)-(8) для уравнения (5) – формулой $u(x,y) = v(x, Dy)$.

Список литературы

[1] Нахушев А. М.. Уравнение математической биологии . М.: Высш.шк., 1995. — 301 с.