

СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Мусакаев Н.Г., Бородин С.Л.

Тюменский филиал ФГБУН Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

Аннотация

Рассмотрен ряд численных методов решения задачи Стефана с целью выбора наиболее эффективного из них с позиций точности и скорости расчетов. Сравнение проводилось на результатах решения задачи движения границы фазового перехода «лед – вода» вокруг вертикальной скважины, проходящей сквозь толщу многолетних мерзлых пород, однако сделанные выводы распространяются и на другие, более сложные, многомерные и многофронтные постановки задачи Стефана. Приведена математическая модель указанной задачи, представлено краткое описание рассматриваемых численных методов и указаны границы их применимости. Представлены все наиболее известные численные методы, а также разработанный авторами новый алгоритм. В результате сравнения указаны достоинства и недостатки различных методов. Показано, что использование явной схемы приводит к значительному увеличению времени расчетов, а шеститочечная симметричная схема может давать колеблющееся решение, таким образом, наиболее предпочтительной является неявная схема. Сделаны выводы о том, что для одномерных однофронтных задач Стефана наиболее эффективным, из рассмотренных, является метод ловли фронта в узел сетки с использованием неявной схемы, а для многомерных многофронтных задач Стефана наиболее эффективными методами являются метод сглаживания коэффициентов а также метод энтальпий с использованием неявной схемы. Работа может быть полезна в качестве методического пособия для студентов, аспирантов а также научных работников, которые в своей профессиональной деятельности столкнулись с необходимостью решения задачи Стефана.

Ключевые слова: Задача Стефана, Численные методы, Протаивание мерзлых пород, Добывающая скважина.

1. Введение. В конце XIX века австрийский физик и математик Йозеф Стефан представил класс задач, посвященных формированию льда. Впоследствии задачи с подвижными межфазными границами стали называть задачами Стефана [1, 2]. В настоящее время под задачей Стефана понимают класс математических моделей, описывающих тепловые, диффузионные или термодиффузионные процессы, сопровождающиеся фазовыми превращениями с поглощением или выделением скрытой теплоты [3]:

- сушка, кристаллизация и сублимация, являющиеся основными процессами химической технологии и широко используемые в разнообразных промышленных аппаратах [4];
- испарительное охлаждение [5];
- промерзание и/или оттаивание грунтов [6] и др.

Аналитическое (автомодельное) решение задачи Стефана можно получить лишь для малого числа постановок, поэтому в большинстве случаев необходимо применять численные методы, которых достаточно много [3, 7-12], однако не было найдено работ, в которых бы был проведен сравнительный анализ этих методов. В связи с этим разумно провести такой анализ и осуществить выбор наиболее эффективного численного метода для решения задач Стефана, который бы сочетал высокую точность и скорость расчетов. В статье, на примере решения одномерной радиальной двухфазной задачи Стефана, применительно к протаиванию мерзлого грунта, окружающего вертикальный канал с теплоносителем, проводится сравнение 7 численных методов, в том числе разработанного авторами нового алгоритма (Метод 2). Из этих методов пять идейно разных, в двух парах подходы схожие, но реализованы они с использованием разных схем. Сделанные выводы распространяются и на другие, более сложные, многомерные и многофронтные постановки задачи Стефана.

2. Постановка задачи. Пусть имеется вертикальная скважина, проходящая сквозь толщу многолетних мерзлых пород (ММП). В результате теплообмена между газожидкостной смесью, движущейся в скважине, и мерзлым грунтом происходит его протаивание. Примем следующие допущения: породы однородны и изотропны; плотность мерзлой породы равна плотности талой; тепло передается только за счет теплопроводности; при движении фронта фазовых переходов в ММП не происходит массопереноса жидких флюидов. Тогда уравнения теплопроводности в талой (1) и мерзлой (2) зонах, начальное (3) и граничные (4, 5) условия, а также закон движения границы раздела талой и мерзлой пород (6) могут быть записаны в виде [13-15]:

$$\rho c_{th} \frac{\partial T_{th}}{\partial t} = \lambda_{th} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{th}}{\partial r} \right), \quad (R_c \leq r \leq R_{th}) \quad (1)$$

$$\rho c_{fr} \frac{\partial T_{fr}}{\partial t} = \lambda_{fr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{fr}}{\partial r} \right), \quad (R_{th} \leq r < \infty) \quad (2)$$

$$T_{fr} = T_{geo}. \quad (t = 0) \quad (3)$$

$$-\lambda_{th} \frac{\partial T_{th}}{\partial r} = \frac{\alpha(T_h - T_0)}{2\pi R_0}, \quad (r = R_c) \quad (4)$$

$$T_{fr} = T_{geo}, \quad (r = \infty) \quad (5)$$

$$\lambda_{fr} \frac{\partial T_{fr}}{\partial r} \Big|_{r=R_{th}+0} - \lambda_{th} \frac{\partial T_{th}}{\partial r} \Big|_{r=R_{th}-0} = \rho w L \frac{dR_{th}}{dt}, \quad (6)$$

Здесь t , r – временная и радиальная координаты; T_i , c_i и λ_i ($i = th, fr$) – температура, коэффициенты теплоемкости и теплопроводности в талой и мерзлой зонах, соответственно; ρ – плотность породы; R_c и R_{th} – внешний радиус канала и радиус протаявшей зоны, соответственно; α – коэффициент теплопередачи от теплоносителя к окружающей породе; T_{geo} , T_h , T_0 – начальная температура породы, температура теплоносителя и температура на границе канала и породы, соответственно; w – льдосодержание мерзлой породы; L – удельная теплота таяния льда.

3. Краткое описание сравниваемых численных методов.

1) Метод энтальпий + Явная схема [8].

Уравнения (1) и (2) заменяются одним уравнением для энтальпии H :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (H = \rho c T)$$

Данное уравнение решается с использованием явной схемы, при этом на каждом шаге по времени после расчета H определяется температура:

$$T = \begin{cases} H / \rho c_{fr}, & (H < 0) \\ 0, & (0 \leq H \leq \rho w L) \\ (H - \rho w L) / \rho c_{th}. & (H > \rho w L) \end{cases}$$

Метод применим для многомерных и многофронтных задач.

2) Метод энтальпий + Неявная схема [8].

Во всей области решается одно уравнение теплопроводности, при этом для талой и мерзлой зон используются соответствующие им физические параметры пород. После расчета температур на каждом шаге по времени вычисляются энтальпии:

$$H_i^{k+1} = H_i^k + \rho \cdot c_i^k (T_i^{k+1} - T_i^k),$$

после чего пересчитываются температуры:

$$T_i^{k+1} = \begin{cases} H_i^{k+1} / \rho c_{fr}, & (H_i^{k+1} < 0) \\ 0, & (0 \leq H_i^{k+1} \leq \rho w L) \\ (H_i^{k+1} - \rho w L) / \rho c_{th}. & (H_i^{k+1} > \rho w L) \end{cases}$$

Несмотря на расчет с помощью неявной схемы, значения теплопроводности и теплоемкости можно брать с предыдущего шага по времени. Это не вносит значительной погрешности, т.к. количество узлов, в которых они отличаются от значений на новом временном шаге, незначительно.

Метод применим для многомерных и многофронтных задач.

3) Метод ловли фронта в узел сетки [7, 12] + Неявная схема [8].

Идея метода состоит в том, что на каждом временном слое итерационно подбирается шаг по времени, за который фазовый фронт переместится на один шаг по пространственной координате. К данному методу применимы только абсолютно устойчивые разностные схемы, т.к. для условно устойчивых, вследствие подбора шага по времени, может не выполняться условие сходимости.

Метод применим только для одномерных и однофронтных задач.

4) Метод ловли фронта в узел сетки [7, 12] + Шеститочечная симметричная схема [8].

В данном методе подход аналогичен предыдущему, только используется шеститочечная симметричная схема.

Метод применим только для одномерных и однофронтных задач.

5) Квазистационарный подход + Неявная схема [8].

При квазистационарном подходе делается дополнительное допущение, что в талой зоне, вследствие ее малой протяженности и длительного времени протаивания, можно использовать стационарное уравнение теплопроводности. Тогда уравнения запишутся в виде:

$$T = T_0 - \frac{T_0 \cdot \ln(r/R_c)}{\ln(R_{th}/R_c)}, \quad (R_c \leq r \leq R_{th}) \quad (7)$$

$$T = \frac{T_J \cdot \ln(r/R_{th})}{\ln((R_c + J\Delta r)/R_{th})}, \quad (R_{th} \leq r \leq R_c + J\Delta r) \quad (8)$$

$$\rho c_{fr} \frac{\partial T_{fr}}{\partial t} = \lambda_{fr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{fr}}{\partial r} \right), \quad (R_c + J\Delta r \leq r < \infty) \quad (9)$$

Здесь (7) – стационарное распределение температуры в талой зоне; (8) – стационарное распределение температуры в малой части начала мерзлой зоны (длина интервала, в котором используется это уравнение, $\leq \Delta r$; J – индекс первого узла сетки после радиуса протаивания); (9) – уравнение теплопроводности в мерзлой зоне. Остальные уравнения аналогичны уравнениям (3)-(6).

Применимость этого метода нужно оценивать для каждой конкретной постановки.

6) Метод выпрямления фронта [7, 12] + Неявная схема [8].

Идея метода заключается в замене переменных, чтобы задача решалась в фиксированной области.

Метод применим для решения одномерных многофронтных задач. В [7] рассмотрено применение данного метода для решения двумерной однофронтной задачи.

7) Метод сглаживания коэффициентов [7, 12] + Неявная схема [8].

Во всей области решается одно уравнение теплопроводности со сглаженными коэффициентами теплопроводности и теплоемкости, которые определяются следующим образом:

$$c = \begin{cases} c_{th}, & (T > \Delta) \\ \frac{c_{th} + c_{fr}}{2} + \frac{w \cdot L}{2\Delta}, & (-\Delta \leq T \leq \Delta) \\ c_{fr}, & (T < -\Delta) \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} \lambda_{th}, & (T > \Delta) \\ \frac{\lambda_{th} + \lambda_{fr}}{2}, & (-\Delta \leq T \leq \Delta) \\ \lambda_{fr}, & (T < -\Delta) \end{cases}$$

где Δ – параметр сглаживания. С другими вариантами сглаживания, а также с выбором параметра сглаживания можно ознакомиться в [12].

На рис. 1 представлена зависимость радиуса протаивания от параметра сглаживания.

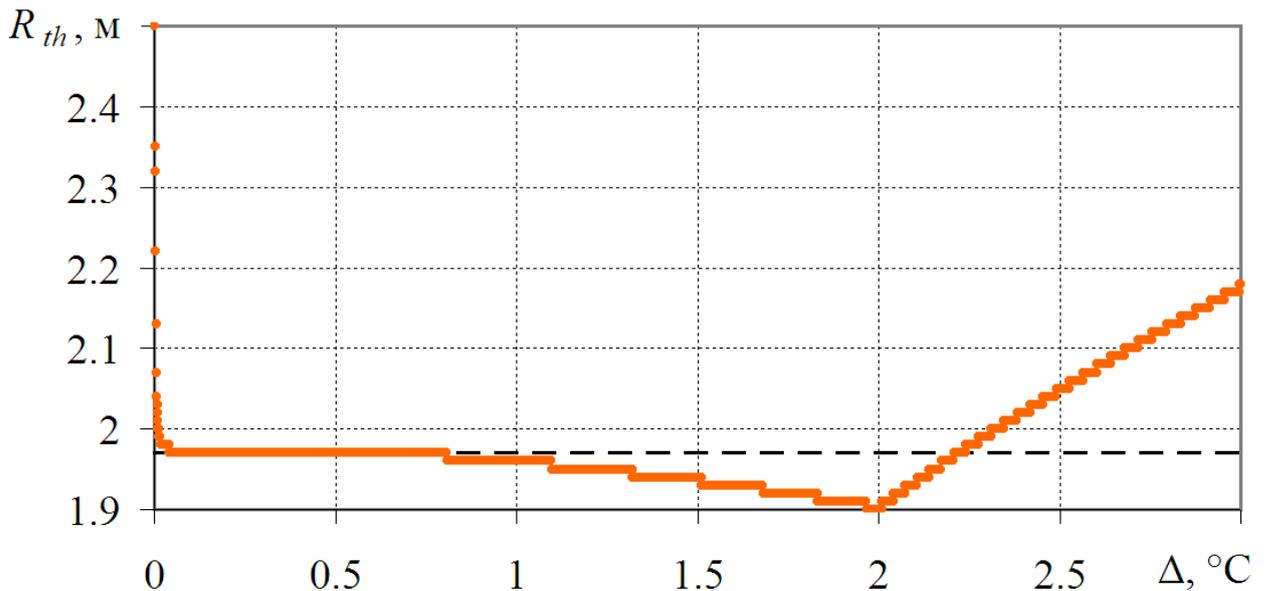


Рис. 1. Значения радиуса протаивания R_{th} в зависимости от параметра сглаживания Δ . Черный пунктир – расчет R_{th} другими методами.

Из рис. 1 видно, что расчет размера протаявшей зоны методом сглаживания коэффициентов совпадает с расчетами другими методами в достаточно широком интервале Δ ; для выбранных параметров $\Delta \in [0.041; 0.807]$. В дальнейшем при расчетах используется $\Delta = 0.1^\circ\text{C}$.

Метод применим для многофронтных и многомерных задач.

4. Сравнение методов. На основе представленных численных методов для решения поставленной задачи была разработана программа, которая рассчитывает распределения температуры по радиальной координате, а также выдает время расчетов. С помощью этой программы было проведено сравнение численных методов. Расчеты проводились при следующих параметрах: $T_h = 50^\circ\text{C}$; $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$; $R_c = 0.1 \text{ м}$; $T_{geo} = -5^\circ\text{C}$; $\rho = 2000 \text{ кг}/\text{м}^3$; $w = 0.25$; $L = 330000 \text{ Дж}/\text{кг}$; $c_{fr} = 1000 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$; $c_{th} = 1380 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$; $\lambda_{fr} = 1.85 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$; $\lambda_{th} = 1.64 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$; $r = 100 \text{ м}$; $\Delta r = 0.01 \text{ м}$; $\Delta t = 50 \text{ с}$ (для явной схемы); $\Delta t = 5000 \text{ с}$ (для неявной схемы). Расчетный период, если не оговорено дополнительно, составляет 5 лет.

На рис. 2 представлены рассчитанные различными методами распределения температуры по радиальной координате.

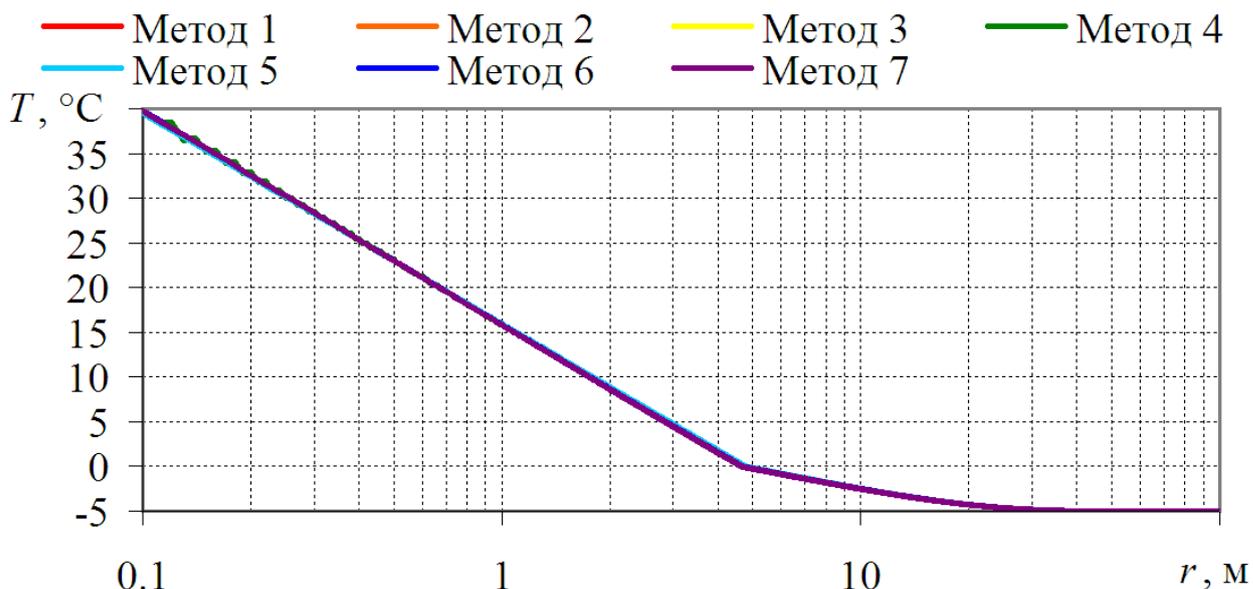


Рис. 2. Распределения температуры по радиальной координате.

Рис. 2 показывает, что все методы дают качественно и количественно похожие результаты. Для более подробного сравнения на рис. 3 и в табл. 1 представлены распределения температуры грунта вблизи скважины. Также на рис. 4, в табл. 2 и табл. 3 приведены распределения температуры грунта вблизи фронта протаивания.

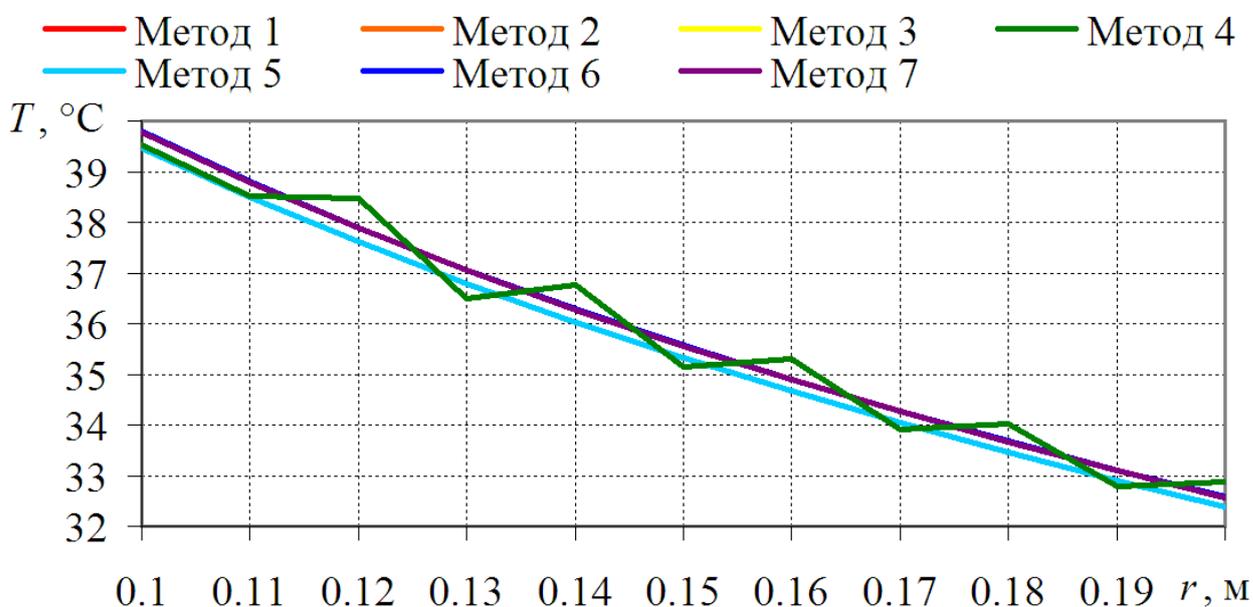


Рис. 3 Распределения температуры по радиальной координате вблизи скважины.

Таблица 1. Значения температуры грунта вблизи скважины.

$r, \text{ м}$	0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.2
Метод 1	39.79	38.79	37.89	37.06	36.29	35.57	34.9	34.27	33.67	33.11	32.57
Метод 2	39.79	38.8	37.89	37.06	36.29	35.57	34.9	34.27	33.67	33.11	32.58
Метод 3	39.79	38.8	37.89	37.06	36.29	35.57	34.9	34.27	33.67	33.11	32.58
Метод 4	39.52	38.51	38.48	36.5	36.77	35.14	35.3	33.9	34.02	32.79	32.88
Метод 5	39.47	38.5	37.61	36.79	36.03	35.33	34.67	34.05	33.47	32.91	32.39
Метод 6	39.79	38.8	37.89	37.06	36.29	35.57	34.9	34.27	33.68	33.11	32.58
Метод 7	39.78	38.79	37.89	37.05	36.28	35.56	34.89	34.26	33.67	33.1	32.57

Из рис. 3 и табл. 1 видно, что:

- 1) Метод 4 дает колеблющееся распределение температуры. Это является особенностью поведения решения, полученного с помощью шеститочечной симметричной схемы при больших шагах по времени, которые возникают при решении методом ловли фронта в узел сетки. Таким образом, для данного метода предпочтительней использовать полностью неявную схему, которая лишена указанного недостатка.
- 2) Значения температуры, рассчитанные Методом 5 немного занижены ($\sim 0.1 \text{ }^\circ\text{C}$). Причиной этого является погрешность вследствие дополнительного допущения данного метода о квазистационарности распределения температуры в талой зоне.
- 3) Результаты всех остальных методов отличаются совершенно незначительно ($\sim 0.01 \text{ }^\circ\text{C}$).

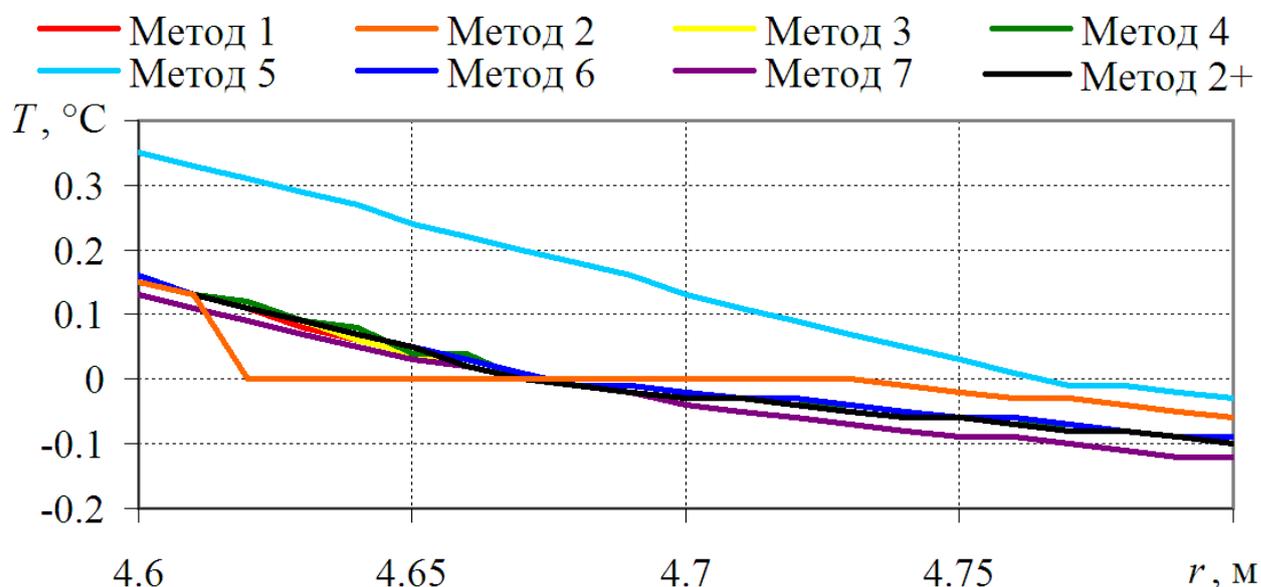


Рис. 4 Распределения температуры по радиальной координате вблизи фронта протаивания.

Таблица 2. Значения температуры грунта вблизи фронта протаивания – 1.

<i>r</i> , м	4.6	4.61	4.62	4.63	4.64	4.65	4.66	4.67	4.68	4.69	4.7
Метод 1	0.15	0.13	0.11	0.08	0.06	0.04	0.02	0	-0.01	-0.01	-0.02
Метод 2	0.15	0.13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Метод 3	0.15	0.13	0.11	0.09	0.06	0.04	0.02	0	-0.01	-0.01	-0.02
Метод 4	0.16	0.13	0.12	0.09	0.08	0.04	0.04	0	-0.01	-0.01	-0.02
Метод 5	0.35	0.33	0.31	0.29	0.27	0.24	0.22	0.2	0.18	0.16	0.13
Метод 6	0.16	0.13	0.11	0.09	0.07	0.05	0.03	0.01	-0.01	-0.01	-0.02
Метод 7	0.13	0.11	0.09	0.07	0.05	0.03	0.02	0	-0.01	-0.02	-0.04
Метод 2+	0.15	0.13	0.11	0.09	0.07	0.05	0.02	0	-0.01	-0.02	-0.03

Таблица 3. Значения температуры грунта вблизи фронта протаивания – 2.

<i>r</i> , м	4.71	4.72	4.73	4.74	4.75	4.76	4.77	4.78	4.79	4.8
Метод 1	-0.03	-0.04	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.07	-0.08	-0.09	-0.1
Метод 2	0	0	0	-0.01	-0.02	-0.03	-0.03	-0.04	-0.05	-0.06
Метод 3	-0.03	-0.04	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.07	-0.08	-0.09	-0.09
Метод 4	-0.03	-0.04	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.07	-0.08	-0.09	-0.09
Метод 5	0.11	0.09	0.07	0.05	0.03	0.01	-0.01	-0.01	-0.02	-0.03
Метод 6	-0.03	-0.03	-0.04	-0.05	-0.06	-0.06	-0.07	-0.08	-0.09	-0.09
Метод 7	-0.05	-0.06	-0.07	-0.08	-0.09	-0.09	-0.1	-0.11	-0.12	-0.12
Метод 2+	-0.03	-0.04	-0.05	-0.06	-0.06	-0.07	-0.08	-0.08	-0.09	-0.1

Анализ рис. 4, табл. 2 и 3 показывает, что:

- 1) При расчете Методом 2 получается резкий разрыв (с 0.13 °С до 0 °С в соседних узлах сетки) и протяженная зона с нулевой температурой, что является недостатком данного метода. Устранить его можно, если после расчетов линейно экстраполировать до нуля последние положительные значения температуры (в данном случае 0.15 °С и 0.13 °С), и после них подставить отрицательные значения температуры, которые находятся после протяженной зоны с нулевой температурой. Результат этого представлен в последних строках табл. 2 и 3 (Метод 2+). Метод 2 в дальнейшем сравнивается с учетом экстраполяции.
- 2) Метод 5 дает немного завышенные значения температуры (~0.1 °С) и завышенное значение радиуса протаивания (~10 см). Причиной этого является погрешность вследствие дополнительного допущения данного метода о квазистационарности распределения температуры в талой зоне.
- 3) Результаты всех остальных методов отличаются совершенно незначительно (~0.01 °С по температуре и максимум 1 см по радиусу протаивания).

В табл. 4 приведены значения радиуса протаивания, а также в табл. 5 приведены времена расчетов, полученные различными методами на разные моменты времени.

Таблица 4. Радиусы протаивания (м).

t , год	Метод 1	Метод 2+	Метод 3	Метод 4	Метод 5	Метод 6	Метод 7
1	2.33	2.33	2.33	2.33	2.38	2.34	2.34
2	3.13	3.14	3.14	3.14	3.21	3.14	3.14
3	3.74	3.74	3.74	3.74	3.82	3.75	3.74
4	4.23	4.24	4.24	4.24	4.33	4.24	4.24
5	4.67	4.67	4.67	4.67	4.77	4.68	4.67
6	5.05	5.06	5.06	5.06	5.16	5.06	5.06
7	5.41	5.41	5.41	5.41	5.52	5.41	5.41
8	5.73	5.74	5.74	5.74	5.85	5.74	5.74
9	6.03	6.04	6.04	6.04	6.16	6.04	6.04
10	6.32	6.32	6.33	6.33	6.45	6.33	6.33

Таблица 5. Времена расчетов (с).

t , год	Метод 1	Метод 2+	Метод 3	Метод 4	Метод 5	Метод 6	Метод 7
1	104	5	1	1.5	2	27	6
2	243	10	1.2	1.9	4	40	13
3	333	15	1.4	2.2	6	50	19
4	462	19	1.6	2.4	8	59	26
5	544	24	1.7	2.6	11	67	31
6	657	30	1.9	2.9	13	75	39
7	781	35	2	3	14	83	44
8	900	40	2.1	3.2	17	93	50
9	923	46	2.2	3.4	19	100	57
10	1123	51	2.3	3.5	20	104	63

Из табл. 4 видно, что Метод 5 дает завышенные значения радиуса протаивания (~10 см), по причине погрешности вследствие дополнительного допущения для этого метода о квазистационарности распределения температуры в талой зоне. Радиусы протаивания, полученные с помощью остальных методов, практически не отличаются (максимальная разница 1 см).

Из табл. 5 видно, что наибольшее время расчета у Метода 1. Это объясняется тем, что используется явная схема, которая является условно устойчивой и для ее сходимости необходим малый шаг по времени. Метод ловли фронта в узел сетки значительно превосходит другие методы в скорости расчета, т.к. в этом методе достигаются большие шаги по времени, которые, тем не менее, не приводят к значительным погрешностям.

Исходя из данных табл. 5, расположим все методы, в порядке убывания скорости расчета (цифра в конце – во сколько раз, в среднем, время расчета больше, чем у наивысшего метода):

- 1) Метод 3 (Ловля фронта в узел сетки + Неявная схема) – 1;
- 2) Метод 4 (Ловля фронта в узел сетки + Шеститочечная симметр. схема) – 1.5;
- 3) Метод 5 (Квазистационарный подход + Неявная схема) – 6.6;
- 4) Метод 2+ (Энтальпии + Неявная схема) – 15.8;
- 5) Метод 7 (Сглаживание коэффициентов + Неявная схема) – 20;
- 6) Метод 6 (Выпрямление фронта + Неявная схема) – 40.1;
- 7) Метод 1 (Энтальпии + Явная схема) – 348.9.

5. Выводы. На основе результатов сравнительного анализа 7 численных методов сделаны следующие выводы:

- 1) Использование явной схемы приводит к значительному увеличению времени расчетов, а шеститочечная симметричная схема может давать колеблющееся решение, таким образом, наилучшей является неявная схема.
- 2) Для одномерных однофронтных задач Стефана наиболее эффективным численным методом, из рассмотренных, является метод ловли фронта в узел сетки с использованием неявной схемы.
- 3) Для многомерных многофронтных задач Стефана наиболее эффективными численными методами являются метод энтальпий с использованием неявной схемы (имеется устранимый недостаток, приведенный в статье), а также метод сглаживания коэффициентов с использованием неявной схемы.

Литература.

1. Данилюк И.И. О задаче Стефана // Успехи мат. наук. 1985. Т.40. №5. С.133-185.
2. Jozef Stefan: His Scientific Legacy on the 175th Anniversary of His Birth / Editor John C. Crepeau. Moscow, Idaho, USA. 2013.
3. Крылов Д.А. Подходы к решению трехмерных задач теплопроводности с учетом фазовых переходов в дисперсных средах // Электронный журнал: «Молодежный научно-технический вестник». 2013. №3. (<http://sntbul.bmstu.ru/doc/562218.html>).
4. Новый справочник химика и технолога. Процессы и аппараты химической технологии. СПб.: НПО «Профессионал». Ч.1., 2004. Ч.П., 2006.
5. Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б. Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. 392с.
6. Основы геокриологии. Ч.4. Динамическая геокриология. Под. Ред. Э.Д. Ершова. М.: Из-во МГУ. 2001.
7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784с.

8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. Пособие для ВУЗов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 432 с.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735с.
10. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // ЖВМ и МФ. 1965. Т.5, №5, С.816-827.
11. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 146с.
12. Павлов А.Р. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса при фазовых переходах. Учебное пособие. Якутск, 2001. 58с.
13. Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г. Теплообмен скважины с окружающими породами // Инженерно-физический журнал. 1998. Т.71. №6. С.1134-1140.
14. Медведский Р.И. Строительство и эксплуатация скважин на нефть и газ в вечномерзлых породах. М.: Недра, 1987. 230с.
15. Мусакаев Н.Г., Романюк С.Н., Бородин С.Л. Численное исследование закономерностей движения фронта фазового перехода в многолетнемерзлых породах // Известия вузов. Нефть и газ. 2011. №6. С.122-128.