Применение методов условной оптимизации при сглаживании точечно заданных аэродинамических обводов

Ерохин Александр Павлович
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
e-mail: a-erokhin@yandex.ru

Аэродинамический профиль является исходной информацией при проектировании крыла летательного аппарата, и требование выдерживания его формы в процессе конструирования и изготовления крыла выдвигается на первый план по сравнению с требованиями компоновки, технологичности и т.д.

В настоящее время информация об обводах профилей обычно представляется в виде упорядоченного дискретного точечного базиса. При определении координат точек профиля расчетным или экспериментальным путем возможны погрешности. При относительно больших погрешностях исходных данных, сплайн, интерполирующий обвод профиля, а также графики его производных имеют резко выраженные осцилляции. В этих случаях возникает необходимость сглаживания обвода путем отклонения от некоторых заданных точек.

Гладкость является наиболее общим требованием, предъявляемым к геометрической модели аэродинамической поверхности. Для обеспечения гладкости важна не только непрерывность производных, но и ограниченность их изменения на малом отрезке, т.е. плавность изменения графика кривизны.

В работе [1] вместе с необходимостью обеспечения неизменности знака второй производной (выпуклости) сглаживаемой кривой, интерполирующей обвод, отмечается важность обеспечения монотонного изменения значения ее кривизны.

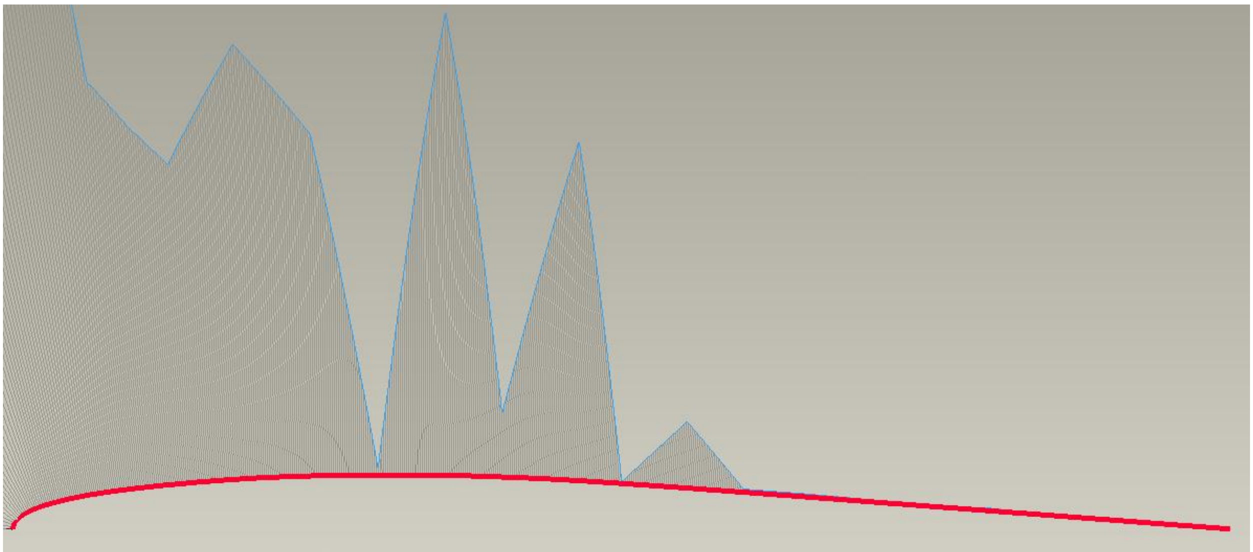

Рис. 1.

Показанный из рис. 1 обвод имеет резкие скачки кривизны, хотя и без изменения её знака. Таким образом, требуется решить задачу обеспечения плавного изменения кривизны на сглаживаемом участке обвода.

Задачу устранения скачков кривизны сглаживаемого обвода можно представить как задачу минимизации значения функции

$$f = (y_1^{II}, y_2^{II}, \cdots, y_n^{II}) \times (y_1^{II}, y_2^{II}, \cdots, y_n^{II})^T \qquad (1)$$

где n – количество узлов сглаживаемого фрагмента обвода, $(y_1^{II}, y_2^{II}, \cdots, y_n^{II})$ – матрица-строка, составленная из значений вторых производных в узлах сглаживаемого фрагмента обвода, T – знак транспонирования.

Поскольку при этом необходимо соблюсти условия, обеспечивающие, во-первых, сохранение выпуклости сглаживаемой кривой и, во-вторых, отклонение от координат исходного обвода на величину не больше заданной, обеспечение плавного изменения кривизны представляет собой задачу условной оптимизации.

Чтобы представить целевую функцию как функцию от значений ординат узлов сглаживаемого фрагмента $y_i, i = 1,2, \cdots, n$, необходимо в явном виде задать зависимость величин вторых производных y_i^{II} от значений ординат y_i. Для этого использованы формулы численного дифференцирования [2]. На сглаживаемом фрагменте обвода узлы расположены на одинаковом расстоянии друг от друга (5% от хорды профиля). Это позволяет применить безразностные формулы, выражающие значения производных через значения функции, выведенные из формулы Лагранжа для случая равных промежутков.

Формула, выражающая значения второй производной через значения функции в пяти точках после отбрасывания бесконечно малых остаточных членов имеет вид:

$$y_i^{II} = \frac{1}{24h^2}(-2y_{i-2} + 32y_{i-1} - 60y_i + 32y_{i+1} - 2y_{i+2}), \qquad (2)$$

где $h = x_i - x_{i-1}$.

Область допустимых значений целевой функции определяется двумя группами ограничивающих функций:

1. Ограничивающие функции, обеспечивающие выпуклость сглаживаемого обвода;
2. Ограничивающие функции, обеспечивающие заданное отклонение от координат исходного обвода.

В качестве ограничений, обеспечивающих сохранение выпуклости кривой при сглаживании, использовано условие отрицательности значений вторых производных в узлах обвода. Таким образом, первая подгруппа ограничивающих функций представляет собой систему неравенств

$$g_j(y) = y_i^{II} \le 0, \qquad i = 1,2, \cdots, n, \qquad j = 1,2, \cdots, n. \qquad (3)$$

Воспользовавшись формулами численного дифференцирования, можно переписать (3) в следующем виде:

$$g_j(y) = \frac{1}{24h^2}(-2y_{i-2} + 32y_{i-1} - 60y_i + 32y_{i+1} - 2y_{i+2}) \le 0, \qquad i = 1,2, \cdots, n,$$
$$j = 1,2, \cdots, n \qquad (4)$$

При сглаживании требуется обеспечить изменение координат узлов обвода не более чем на 3% от исходных значений. Ограничивающие функции, обеспечивающие выполнение этих условий, можно представить в виде системы неравенств

$$g_j(y) = \left|\frac{y_i^k - y_i^0}{y_i^0}\right| - 0{,}03 \le 0, \qquad i = 1,2, \cdots, n, \qquad j = n+1, n+2, \cdots, 2n. \quad (5)$$

где y_i^0 – исходное значение ординаты в i –й точке сглаживаемого фрагмента обвода, y_i^k значение ординаты в i –й точке на k –м шаге минимизации.

Сглаживаемый фрагмент обвода на всем своем протяжении является выпуклым и ординаты его узлов отличаются от исходных не более чем на 3%. Т.е. начальная точка y^0 находится в области допустимых значений целевой функции. Это позволяет применить для нахождения минимума целевой функции метод барьерных функций [3].

Идея метода заключается в сведении задачи на условный минимум к решению последовательности задач поиска минимума вспомогательной функции

$$F(y, r^k) = f(y) + P(y, r^k), \tag{6}$$

где $P(y, r^k)$ – штрафная функция, $r^k \geq 0$ – параметр штрафа.

В качестве $P(y, r^k)$ использована логарифмическая штрафная функция

$$P(y, r^k) = -r^k \sum_{j=1}^{m} \ln\left[-g_j(y)\right]. \tag{7}$$

На каждой k -й итерации ищется точка y^* минимума вспомогательной функции $F(y, r^k)$ при заданном параметре r^k с помощью одного из методов безусловной минимизации. Полученная точка $y^*(r^k)$ используется в качестве начальной на следующей итерации, выполняемой при уменьшающемся значении параметра штрафа.

Поскольку целевая и ограничивающие функции имеют непрерывные частные производные во всех точках сглаживаемого обвода, для поиска минимума вспомогательной функции использован метод градиентного спуска [3]. Стратегия метода состоит в построении последовательности точек $\{y^l\}$, $l = 0,1,\cdots$, таких что $F(y^{l+1}, r^k) < F(y^l, r^k)$, $l = 0,1,\cdots,$. Точки последовательности $\{y^l\}$ вычисляются по правилу

$$y^{l+1} = y^l - t_l \nabla F(y^l, r^k), \tag{8}$$

где точка y^0 соответствует исходным значения ординат точек обвода; $\nabla F(y^l, r^k)$ – градиент вспомогательной функции, вычисленный в точке y^l; величина шага t_l задается перед первой итерацией и остается постоянной до тех пор, пока функция убывает в точках последовательности, что контролируется путем проверки выполнения условия $F(y^{l+1}, r^k) - F(y^l, r^k) < 0$.

Градиент вспомогательной функции вычисляется следующим образом:

$$\nabla F(y^l, r^k) = \nabla f(y^l) - r^k \sum_{j=1}^{2n} \nabla \ln\left[-g_j(y^l)\right], \tag{9}$$

где $\nabla f(y^l)$ – градиент целевой функции, $\nabla \ln\left[-g_j(y^l)\right]$ – градиенты ограничивающих функций.

Кривизна полученного в результате проведенной минимизации профиля изменяется не монотонно, однако, как видно на графике (рис. 2) её скачки существенно уменьшились по сравнению с исходным профилем. Такое поведение кривизны обвода в инженерной практике считается допустимым.

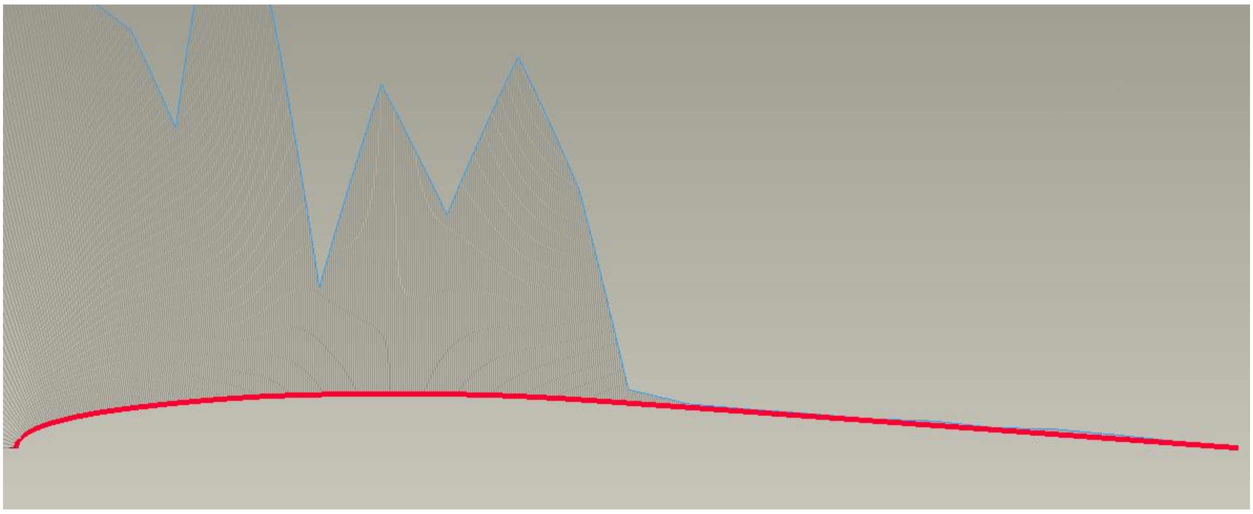

Рис. 2.

Помимо этого, дополнительно проведенные исследования показали, что безусловная минимизация целевой функции позволяет получить кривую с монотонно изменяющейся кривизной, однако в рассматриваемом случае это сопровождается нарушением ограничения 1 – на обводе появляется вогнутость.

Список литературы

1. Тузов А. Д., Кил Ин Гю Методика автоматизированного проектирования контуров сложных поверхностей летательных аппаратов с использованием сетки плоских сечений // Прикладная геометрия, вып. 11, N22, 2009. – С. 127-142.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. т. 1 / М.: изд-во физико-математической литературы, 1962. – 464 с.
3. Пантелеев А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учеб. пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – 2-е изд., исправл. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.: ил.