

0.1. Индуцкая Т.С. Численное решение дифференциально-алгебраических уравнений с производной Римана — Лиувилля порядка α

Дифференциальные уравнения (ДУ) дробного порядка возникают в различных разделах физики сплошных сред [1]. В настоящее время направление вычислительной математики, связанное с численными методами решения систем ДУ с дробными производными, находится в начале своего развития. Представляемая работа посвящена разработке численных методов решения вырожденных систем ДУ дробного порядка с производной Римана — Лиувилля. Такие задачи будем называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ) дробного порядка, по аналогии с ДАУ целого порядка.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$D_{0+}^{\alpha} (A(t)u(t)) + B(t)u(t) = f(t), t \in (0; 1], \quad (1)$$

с производной Римана — Лиувилля дробного порядка $0 < \alpha < 1$

$$D_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds.$$

где $A(t), B(t)$ — переменные $(n \times n)$ матрицы, причем $A(t) \equiv 0$, $f(t)$ и $u(t)$ — известная и искомая n -мерные вектор-функции. Предполагается, что элементы $A(t), B(t), f(t)$ обладают необходимой степенью гладкости. Для уравнения (1) зададим начальное условие

$$D_{0+}^{\alpha-1} (A(t)u(t)) \Big|_{t \rightarrow 0+} = u_0, u_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Задача (1), (2) традиционно называется задачей типа Коши [2]. Для ДАУ дробного порядка (1), (2) доказана теорема существования единственного непрерывного решения с помощью сведения к соответствующему интегро-алгебраическому уравнению. Разработаны численные методы решения на основе квадратурных формул левых и средних прямоугольников, а также метода интегрирования произведений. Результаты проведенных численных экспериментов показывают эффективность разработанных алгоритмов и демонстрируют сходимость порядка не хуже $1 - \alpha$, а в некоторых случаях достигается первый порядок.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00173, <https://rscf.ru/project/22-11-00173/>

Список литературы

- [1] Учайкин В. В. Дробно-дифференциальные модели в гидродинамике // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27. № 1. С. 5–40.

- [2] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.