0.1. *Трифонова Г.О.* **Решение нелинейного уравнения с младшим слагаемым при наличии точечного источника в правой части**

В настоящей работе, продолжающей [1], [2], изучается нелинейное уравнение в присутствии младшего слагаемого. Рассматривается первая краевая задача для уравнения в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с точечным источником:

$$-\operatorname{div} g(x, \nabla w(x)) + g_0(x) w = q\,\delta(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$w(x) = w_\gamma(x), \quad x \in \Gamma\,. \quad (2)$$

Здесь Γ - Липшиц-непрерывная граница Ω, функция w_γ задана на границе и является следом функции из пространства Соболева $W_2^{(1)}(\Omega)$, функция $g_0 : \Omega \to R^1$ почти всюду неотрицательна и ограничена:

$$0 \leqslant g_0(x) \leqslant \overline{g}_0.$$

Функция $g = g(x, \lambda) : \Omega \times R^n \to R^n$ сильно монотонна, Липшиц —непрерывна по λ для всех $x \in \Omega$, измерима по $x \in \Omega$ для каждого $\lambda \in R^n$. Существуют постоянная α, удовлетворяющая неравенству $\alpha > \alpha^* = (n-2)/2$, и симметричная, положительно определенная матрица G такие, что для всех $x \in B_r(0) \subset \Omega$ и для каждого $\lambda \in R^n$ выполнено неравенство $|g(x,\lambda) - G\,\lambda| \leqslant c\,|\,x\,|^\alpha\,|\,\lambda\,| + C$, где $r, c, C > 0$ – положительные постоянные, $B_r(y) = \{x \in R^n : |x - y| < r\}$.

Решение задачи ищется в виде суммы двух функций $w = w_0 + u$, где функция u принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, а функция w_0 из пространства $W_1^{(1)}(\Omega)$ удовлетворяет задаче:

$$\int\limits_\Omega (G\nabla w_0(x), \nabla\eta(x))\,dx = q\eta(0) \quad \forall\,\eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

$$w_0(x) = w_\gamma(x), \quad x \in \Gamma\,.$$

Для поиска функции u рассматривается следующий итерационный процесс :

$$\int\limits_\Omega \Big(\nabla(u^{(k+1)} - u^{(k)})\,,\,\nabla\eta\Big)\,dx =$$

$$-\tau \int\limits_\Omega \Big(g(x, \nabla u^{(k)} + \nabla w_0) - G\nabla w_0\,,\,\nabla\eta\Big)$$

$$+g_0(x)(u^{(k)} + w_0)\eta\,dx.$$

Устанавливается сходимость итерационной последовательности в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ со скоростью геометрической прогрессии. Рассматриваемый метод решения задачи (1), (2) доказывает существование и единственность этой задачи в пространстве $W_1^{(1)}(\Omega)$.

Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030"). Аффилиация: Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Научный руководитель — д.ф.-м.н. Задворнов О. А.

Список литературы

[1] Задворнов О. А. Существование решения квазилинейной эллиптической краевой задачи при наличии точечных источников //Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2010. Т. 1. № 152. С. 155–163.

[2] Задворнов О. А., Трифонова Г. О. Итерационный метод решения нелинейной краевой задачи с точечным источником //Изв. вузов. Матем. 2022. № 5. С. 74–79.