0.1. *Кочарина А.Р.* **Распространение MUSCL–схемы на случай неравномерной сетки**

Для численного решения уравнений Навье —Стокса сжимаемой и несжимаемой жидкости методами конечных объёмов активно используется MUSCL–схема [1], которая благодаря своей простоте остаётся популярной в настоящее время [2].

Идея MUSCL–схемы состоит в специальном способе вычисления численного потока через грань ячейки. Так, при решении скалярного нелинейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x} = 0$$

численный поток через грань $i+\frac{1}{2}$ определяется по формуле

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

где $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}$ определяется путём специальной интерполяции (*реконструкции*) на грань $i+\frac{1}{2}$ ячейки сетки:

$$\begin{gathered}\hat{u}_{i+\frac{1}{2}} = u^L_{i+\frac{1}{2}} \equiv \overline{u}_i + \frac{1}{4}[(1-k)(\overline{u}_i - \overline{u}_{i-1}) + \\ +(1+k)(\overline{u}_{i+1} - \overline{u}_i)] \quad \text{(реконструкция слева)},\end{gathered} \tag{1}$$

где $\overline{u}_i$ – средние по ячейке. Случай $k = 1/3$ даёт формально третий порядок аппроксимации в методе конечных объёмов.

В недавней статье [2] Нишикава проводит подробный анализ порядка точности аппроксимации MUSCL–схемы. Однако анализ в [2] и в аналогичных работах ограничен случаем равномерной сетки.

Цель настоящей работы состоит в распространении MUSCL–схемы 3–го порядка на случай неравномерной структурированной сетки:

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}} = u^L_{i+\frac{1}{2}} \equiv c_{10}\overline{u}_{i-1} + c_{11}\overline{u}_i + c_{12}\overline{u}_{i+1}, \tag{2}$$

где коэффициенты c_{ij} зависят от шагов сетки, их вывод дан в [3].

В работе исследован порядок аппроксимации для исходной MUSCL–схемы (1) и модифицированной MUSCL–схемы (2) в случае неравномерной сетки. Показано, что порядок аппроксимации схемы зависит от характера неравномерной сетки: либо сетка имеет постоянный закон сгущения, либо сетка произвольная(искажённая). В работе показано:

Для 1D случая:

1. Исходная MUSCL–схема (1) имеет лишь 2–й порядок аппроксимации на неравномерных сетках с постоянным законом сгущения и 0–й порядок аппроксимации для неравномерных сеток произвольного типа. Таким образом, на произвольной искажённой сетке MUSCL–схема с постоянными коэффициентами интерполяции вообще не аппроксимирует исходное уравнение,
2. MUSCL–схема с учётом неравномерности (2) имеет 3–й порядок аппроксимации на неравномерных сетках с постоянным законом сгущения и 2–й порядок на произвольных неравномерных сетках.

Эти результаты показаны теоретически и в ходе вычислительного эксперимента.

Для 3D случая: Полученная MUSCL–схема с учётом неравномерности (2) внедрена в численный алгоритм искусственной сжимаемости для решения уравнений Эйлера и Навье —Стокса несжимаемой жидкости. Схема протестирована на задачах обтекания цилиндра невязкой несжимаемой жидкостью, а также на задаче о течении жидкости в проточном тракте гидротурбины. Показано, что MUSCL–схема с учётом неравномерности имеет ту же скорость сходимости и даёт более гладкое решение в областях с неплавным сгущением сетки.

Научный руководитель — к.ф.-м.н. Чирков Д. В.

Список литературы

[1] van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method // J. Comput. Phys. 1979. Vol. 32. N. 1. P. 101–136.
[2] van Leer B., Nishikawa H. Towards the ultimate understanding of MUSCL: pitfalls in achieving third-order accuracy // J. Comput. Phys. 2019. Vol. 446.
[3] Chi-Wang Shu. High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics, Vol.9: Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 1999. P. 439–582.