

0.1. Кузнецов К.С. Решение трехмерных сингулярно возмущенных систем уравнений в области со сложной геометрией при помощи метода PINN

В докладе рассматривается решение стационарной системы уравнений диффузии—конвекции—реакции в области $\Omega \in \mathbb{R}^3$, записанная в векторной форме [1]:

$$-\varepsilon \Delta \mathbf{u} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ — вектор неизвестных функций, $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — вектор скоростей, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ — вектор сил реакции, $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ — вектор внешних сил, $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ — вектор коэффициентов диффузии. Уравнениям (1) соответствуют граничные условия первого рода:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^b(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2)$$

где $\mathbf{u}^b = \{u_1^b, u_2^b, \dots, u_n^b\}$ — известные функции, $\partial\Omega$ — граница области Ω .

В том случае, когда коэффициенты перед старшими производными ε в системе (1) являются достаточно малыми, в решении появляются зоны быстрых изменений функций, иногда называемые сингулярными возмущениями.

В качестве инструмента для численного решения задач были использованы метод конечных элементов, реализуемый программным обеспечением FreeFem++ [2], а также метод Physics Informed Neural Networks (PINN), реализуемый на библиотеке Tensorflow языка программирования Python. Метод PINN заключается в аппроксимации неизвестных функций нейронными сетями путем их обучения на минимизацию квадратичного функционала качества, включающего в себя слагаемые для невязок уравнений, граничных и начальных (при их наличии) условий. Стоит отметить, что метод конечных элементов использовался для верификации метода PINN [3] в случае линейной системы уравнений (1). В случае же наличия нелинейностей в уравнениях использование метода конечных элементов для решения затруднительно.

Список литературы

- [1] Лисейкин В.Д. Разностные сетки. Теория и приложения / Новосибирск: СО РАН, 2014. 256 с.
- [2] НЕСНТ F. New development in FreeFem++ // Journal of numerical mathematics. 2012. Vol. 20. N. 3-4. P. 251–266.
- [3] RAISSI M., PERDIKARIS P., KARNIADAKIS G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. 2019. Vol. 378. P. 686–707.