0.1. Еремчук М.П. Анализ экранированной гармонической системы в трехмерной области методом итерационных расширений

Данная работа посвящена решению экранированного уравнения Пуассона в трехмерной области со сложной геометрией при обязательном наличии условия Дирихле с помощью метода итерационных расширений, являющегося обобщением метода фиктивных компонент [1] при введении дополнительного параметра в определении расширенной матрицы и выборе оптимального итерационного параметра методом минимальных невязок. Наличие сложной геометрии области и краевого условия Дирихле являются проблемой при решении эллиптических уравнений [2]. Методология фиктивных компонент исследовалась и оптимизировалась для получения оптимальной асимптотики для эллиптических краевых задач второго порядка с условием Неймана [3]. Краевую задачу для экранированного уравнения Пуассона

$$u: -\Delta \ddot{u} + \kappa \ddot{u} = \check{f}|_G, \quad \ddot{u}|_{\gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \ddot{u}}{\partial n}|_{\gamma_2} = 0$$

определим на области $G \subset \mathbb{R}^3$ с границами

$$\partial G = \bar{s}, \quad s = \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset.$$

Данная краевая задача продолжается через границу с условием Дирихле и вводится фиктивная однородная задача, дополняющая область со сложной геометрией до трехмерного примитива, например, параллелепипеда. Полученная продолженная задача аппроксимируется и приводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N: C\bar{u} = \bar{f}, \quad \bar{f} \in \mathbb{R}^N.$$

Приближённое решение системы уравнений находится с помощью метода итерационных расширений:

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N: B(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(C\bar{u}^{k-1} - \bar{f}), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1, \quad \beta > \alpha, \quad \tau_0 = 1,$$

$$\tau_{k-1} = [\bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}] / [\bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}], \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где в итерационном процессе пошагово необходимо пересчитывать невязки, поправки и эквивалентные невязки

$$\bar{r}^{k-1} = C\bar{u}^{k-1} - \bar{f}, \quad \bar{w}^{k-1} = B^{-1}\bar{r}^{k-1}, \quad \bar{\eta}^{k-1} = C\bar{w}^{k-1}.$$

В алгоритме метода итерационных расширений заложена автоматизация управления для расчетов оптимальных итерационных параметров на основе по-итерационной обработки информации до остановок в итерационных процессах по приводимым критериям, т.е. при выполнении предварительно задаваемых оценок погрешности. Минимизация ошибок в

методе итерационных расширений использует более сильные нормы чем энергетические нормы в возникающих задачах поитерационно. Развиваемый метод итерационных расширений имеет наилучшую асимптотику, т.е. оптимальную асимптотику по количеству требуемых операций и допускает простую, эффективную и универсальную реализацию по сравнению с методом фиктивного пространства [4].

Научный руководитель — д.ф.-м.н. Ушаков А. Л.

Список литературы

- [1] АСТРАХАНЦЕВ Г. П. Метод фиктивных областей для эллиптического уравнения второго порядка с естественными граничными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1978. Т. 18. № 1. С. 118–125.
- [2] USHAKOV A. L. Investigation of a mixed boundary value problem for Poisson equation // 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). Sochi, 2017. Vol. 10. N. 1. P. 26–46.
- [3] КАПОРИН И. Е., НИКОЛАЕВ Е. С. Метод фиктивных неизвестных для решения разностных уравнений эллиптического типа в областях сложной формы // ДАН СССР. 1980. Т. 251. № 3. С. 544–548.
- [4] МАЦОКИН А. М., НЕПОМНЯЩИХ С. В. Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33. № 1. С. 52–68.