0.1. *Баранчиков В.Р.* **Модификация формул Гаусса для расчета интеграла столкновений в 4-х волновом кинетическом уравнении.**

Исследование турбулентных потоков в жидкостях, газах и плазме остается одной из нерешенных проблем современной физики. Для описания однородного изотропного слаботурбулентного взаимодействия волн в бозе-газе в работе [1] получено 4-х волновое кинетическое уравнение (КУ) с интегралом столкновений в правой части:

$$\frac{dn_\omega}{dt} = \int\limits_{\Delta} \mathcal{P}(\omega,\omega_2,\omega_3)[n_\delta n_2 n_3 + \\ + n_\omega(n_2 n_3 - n_\delta n_3 - n_\delta n_2)]d\omega_2 d\omega_3, \quad (1)$$

где $n_\omega = n(\omega, t)$ – спектр волнового действия, зависящий от частоты волны ω и от времени $t > 0$, $n_i = n(\omega_i, t)$, $i = 2, 3$, $n_\delta = n(\omega_\delta, t)$, $\omega_\delta = \omega_2 + \omega_3 - \omega$, $\Delta = \{(\omega_2, \omega_3) : \omega_2, \omega_3, \omega_\delta \geq 0\}$ – 2D область интегрирования,

$$\mathcal{P}(\omega,\omega_2,\omega_3) = \frac{4\pi^3}{\sqrt{\omega}} \min[\sqrt{\omega}, \sqrt{\omega_2}, \sqrt{\omega_3}, \sqrt{\omega_\delta}] \quad (2)$$

– ядро интеграла столкновений. Характерное поведение решения (1), (2) – степенная функция с точкой ветвления в нуле [1]: $n_\omega \sim \omega^{-7/6}$.

Для расчета интеграла столкновений ограничим частотный диапазон $\omega \in [0, \omega_{max}]$. Выполним декомпозицию области Δ так, чтобы в каждой подобласти функция минимума, стоящая в $\mathcal{P}$, принимала значение одного из своих аргументов. Получим 5 треугольных и 2 квадратных подобласти (см. рис 1. из статьи [2]). Перед расчетом отобразим каждую из них в канонический квадрат $[-1, 1]^2$ с применением линейных отображений для прямоугольных подобластей и замен переменных из [3] для треугольных. В силу теоремы Фубини вместо двойного мы получим повторный интеграл и сведем задачу к поиску 1D интеграла вида: $I^g = I^g[f] = \int\limits_{-1}^{1} g(x)f(x)dx$, где $g(x)$ имеет точки ветвления или другие особенности на границах отрезка $[-1, 1]$, $f(x)$ – функция высокого порядка гладкости. Классические квадратурные формулы Гаусса (КФГ) в расчете этого интеграла будут малоэффективны, так как производные функции $g(x)$ терпят разрыв, поэтому применим отображение с параметром $\varepsilon > 0$, которое будет сгущать узлы КФГ около особых точек:

$$x = h_\pm(y) = \pm 1 + \varepsilon \sinh \frac{y \mp 1}{2} \sinh^{-1} \frac{2}{\varepsilon}$$

Пусть $g(x) = (1 - x)^\alpha$, $\alpha > -1$ тогда, после применения замены $h_\pm(y)$, КФГ для расчета этого интеграла дает погрешность [2]:

$$|E_n[gf]| \leq \frac{M\tilde{\varepsilon}}{2} \frac{j_1^{2(\alpha+1)}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} n^{-2(1+\alpha)}, \quad (3)$$

где $\tilde{\varepsilon} \sim \varepsilon \ln[1/\varepsilon]$ при $\varepsilon \to 0$, $M = ||f||$, n – количество узлов КФГ, j_1 – первый положительный ноль функции Бесселя нулевого порядка. Далее мы можем приближенно вычислить интеграл $I^g[f]$:

$$\int\limits_{-1}^{1} g(h(y))f(h(y))h'(y)dy \approx \sum_{i=1}^{n} w_i g(h(y_i))f(h(y_i))h'(y_i),$$

где w_i – веса КФГ, y_i – узлы КФГ. В работе проведены расчеты интеграла по подобластям $\Delta_0 = \{(\omega_2, \omega_3) : \omega_\delta \geq 0, \omega_2, \omega_3 \leq \omega\}$ и $\Pi_1 = [\omega, \omega_{max}] \times [0, \omega]$. В таблице указаны величины $R_{n,\varepsilon} = \log_{10}(|I_{2n} - I_n|/I_{2n})$, где I_n – значение интеграла по подобласти Δ_0 на n узлах при $w = 1$.

Таблица. Значения $R_{n,\varepsilon}$.

n	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-9}$	$\varepsilon = 10^{-15}$
64	$-1,7656$	$-3,1109$	$-3,5767$	$-3,3692$
128	$-1,9678$	$-4,4759$	$-4,1739$	$-3,9677$
256	$-2,1706$	$-5,1824$	$-4,8035$	$-4,5850$

Видно, что $|R_{n,\varepsilon}|$ растёт с ростом n, что говорит о быстрой сходимости при малых ε, см. оценку (3).

Однако значения $R_{n,\varepsilon}$ ведут себя немонотонно по ε, в связи с этим выявлены оптимальные значения (ε_{opt}), при которых $R_{n,\varepsilon}$ являются наименьшими. Для Δ_0 при $\omega = 1, 10$ $\varepsilon_{opt} \approx 10^{-5}$; при $\omega = 100$ $\varepsilon_{opt} \approx 10^{-6}$; при $\omega = 1000$ $\varepsilon_{opt} \approx 10^{-5}$.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации 075-15-2022-281. Научный руководитель — к.ф.-м.н. Семисалов Б.В.

Список литературы

[1] Zhu Y., Semisalov B.V., Krstulovic G., Nazarenko S.V. Testing wave turbulence theory for the Gross-Pitaevskii system // Phys. Rev. E. 2022. Vol. 106. Art. №014205.

[2] Semisalov B.V., Medvedev S.B., Nazarenko S.V., Fedoruk M.P. Numerical analysis of the kinetic equation describing isotropic 4-wave interactions in non-linear physical systems // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2024. Vol. 133. Art. №107957

[3] Hossain M.A., Islam Md. S. Generalized Composite Numerical Integration Rule Over a Polygon Using Gaussian Quadrature // Dhaka Univ. J. Sci. 2014. Vol. 62. No. 1. P. 25–29.