

0.1. Бугоец И.А., Семисалов Б.В., Шапеев В.П. Метод коллокации и наименьших квадратов (КНК) с аппроксимацией Паде для решения уравнения Бюргерса

Анализ прикладных проблем механики сплошных сред сводится к задачам математической физики, решение которых, как правило, не удается найти аналитически, поэтому важно создавать высокоточные вычислительные алгоритмы. Одно из уравнений, описывающих течения несжимаемой вязкой жидкости – уравнение Бюргерса (УБ). В этой работе исследована тестовая неоднородная начальная краевая задача для УБ:

$$\begin{cases} u_t + uu_x - \nu u_{xx} = f(t, x), \\ u(0, x) = \exp(x), \quad x \in [0, 2], \quad t \in [0, 1], \\ u(t, 0) = \exp(t), \quad u(t, 2) = \exp(t + 2), \end{cases} \quad (1)$$

где $f(t, x) = \exp(t + x)[1 - \nu + \exp(t + x)]$, ν – кинематическая вязкость, $u(t, x)$ – скорость течения жидкости, t – время, x – координата точки жидкости. Задача (1) имеет точное решение:

$$u(t, x) = \exp(t + x).$$

Для численного решения задачи (1) будем использовать метод КНК, который в отличие от других методов дает возможность находить решение не только в определенных точках, а искать его как наперед заданную функцию. В рамках метода КНК используем QR-разложения матриц, которые улучшают точность поиска этой функции тем, что не ухудшают обусловленность линеаризованной задачи.

Удобный и простой способ поиска решения – использовать полином как базисную функцию [1]. Однако во многих прикладных задачах точность метода может быть существенно повышена при использовании аппроксимантов Паде:

$$u(t, x) \approx \frac{\sum_{i=0}^N a_i(t)x^i}{1 + \sum_{i=1}^M b_i(t)x^i}, \quad (2)$$

которые дают лучшую точность, так как знаменатель базисной функции позволяет учитывать существование особых точек у аналитического продолжения решения в комплексную плоскость.

В данной работе предложен новый вариант численного решения задачи (1) методом КНК с базисной функцией (2), заданной на всем отрезке $x \in [0, 2]$, и с разными способами дискретизации по времени на основе

- 1) неявной разностной схемы 1-го порядка с весом,
- 2) схемы Кранка–Николсона (CN),
- 3) явной схемы Рунге–Кутты (RK) 4-го порядка,
- 4) неявной схемы RK с применением аппроксимации Гаусса–Лежандра (IRKGL) 10-го порядка.

Некоторые результаты численных экспериментов приведены в табл. 1. Стоит учесть, что для полиномиальной аппроксимации использован многоячеичный вариант метода КНК, а приближения Паде строились лишь в одной ячейке. Из этого следует, что для достижения заданной точности в полиномиальном варианте тратится больше памяти, а для расчёта значения функции $u(t, x)$ в конкретной точке (t, x) – больше операций. И как результат, метод КНК с аппроксимацией Паде экономичнее и точнее.

Таблица 1: Параметры численных методов, погрешности в норме L_2 (err) и обусловленности соответствующих СЛАУ (cond)

Метод	N	M	err	cond
IRKGL, Паде	4	5	1.01e-11	20e+13
RK, Паде	5	6	2.86e-11	32e+12
CN, полиномы	4	0	2.23e-07	40e+3
CN, Паде	4	5	2.11e-07	73e+8

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 23-21-00499).

Список литературы

- [1] SHAPEEV V. P., VOROZHTSOV E.V. CAS Application to the Construction of the Collocations and Least Residuals Method for the Solution of the Burgers and Korteweg–de Vries–Burgers Equations //Proc. of 16th International Workshop, CASC 2014, Warsaw, Poland, September 8–12, 2014. LNSC Vol. 8660. P. 434–448.