

**0.1. Куткин Л.И., Семисалов Б.В., Шапеев В.П.  
Решение задачи Дирихле для уравнения  
Пуассона методом коллокаций с аппроксимацией Паде.**

Уравнение Пуассона (УП) описывает широкий спектр физических явлений: безвихревые движения жидкостей и газов, электрический и гравитационный потенциалы и другие. Поиск высокоточных решений УП при наличии особенностей искомой функции представляет актуальную проблему. Для решения УП предложены методы конечных разностей, конечных элементов, спектральные методы. В этой работе мы применили метод коллокаций и наименьших квадратов (КНК). В [1] этот метод развит на основе полиномиальных приближений.

Однако в случаях задач с особенностями точности приближения в базисе из полиномов оказывается недостаточно. В работе решена двумерная задача Дирихле для УП (1) методом КНК с дробно-рациональной аппроксимацией Паде (АП). Новизна заключается в том, что по образцу [2] мы приближаем решение отношением двух полиномов от двух переменных (2)–(4). Отношение (2) подставляется в уравнение и в граничные условия задачи (1). В результате получаются соотношения (5), (6). Отметим, что (5) получено с применением линеаризации: для поиска  $M$  и  $P$  из него требуется взять решение  $U^k$  с предыдущей итерации по нелинейности. Уравнения (5) и (6) далее записываются в узлах, распределённых равномерно внутри  $\Omega$  и на  $\partial\Omega$ . Таким образом, на очередной итерации требованием выполнения соотношений (5) и (6) в узлах сетки строится переопределённая СЛАУ на коэффициенты числителя и знаменателя, которая решается методом наименьших квадратов с помощью QR-декомпозиции её матрицы. Преимуществом АП по сравнению с полиномиальной является возможность существенно уменьшить погрешность.

$$\Delta U = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad U|_{\partial\Omega} = g(x, y), \quad (1)$$

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\},$$

$$U(x, y) = P(x, y)/M(x, y), \quad (2)$$

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^i c_{ij} x^{i-j} y^j, \quad (3)$$

$$M(x, y) = 1 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^i t_{ij} x^{i-j} y^j, \quad (4)$$

$$\Delta P = Mf + 2(U_x^k M_x + U_y^k M_y) + U^k \Delta M. \quad (5)$$

$$P - Mg = 0, \quad (6)$$

Нами рассмотрена тестовая задача (1) при  $f(x, y) = g(x, y) = \exp(x) + \exp(y)$  и с точным решением  $U(x, y) = \exp(x) + \exp(y)$ . В табл. 1, 2 приведены

данные о наиболее точных решениях, полученных с использованием полиномиальных базисов и АП.

Здесь Grid – число узлов, Degree – степень аппроксимирующего полинома (в случае АП вначале пишется степень числителя, затем – знаменателя), R – относительная погрешность решения, Cond – число обусловленности СЛАУ, СПС (степень переопределённости СЛАУ) – отношение числа строк матрицы (число точек коллокации и граничных точек) к числу столбцов (число искомых коэффициентов аппроксиманта).

Таблица 1: Результаты с применением полиномов.

| Grid    | Degree | R        | Cond     | СПС  |
|---------|--------|----------|----------|------|
| 12 x 12 | 10     | 6.26e-11 | 1.46e+08 | 2.12 |

Таблица 2: Результаты с аппроксимацией Паде.

| Grid    | Degree | R          | Cond       | СПС    |
|---------|--------|------------|------------|--------|
| 11 x 11 | 7/8    | 8.1348e-13 | 5.0285e+16 | 1.4625 |

Видно, что помимо увеличения точности при использовании АП существенно уменьшается размер сетки, а значит и время расчёта.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 23-21-00499).*

**Список литературы**

- [1] ШАПЕЕВ В. П., БЕЛЯЕВ В.А., ИДИМШЕВ С.В. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Пуассона // Выч. технологии. 2011. Т. 16, №. 1. С. 85–93.
- [2] ШАПЕЕВ В.П. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом коллокации и наименьших квадратов с аппроксимацией Паде // Вестник ЮУрГУ. Серия «ММП». 2023. Т. 16, № 4. С. 71–83.