0.1. *Трифонова Г.О.* О решении задачи фильтрации с предельным градиентом при наличии точечных источников

Исследована задача фильтрации с предельным градиентом [1] для пространств размерности $n = 2$ и $n = 3$ при наличии нескольких точечных источников интенсивности $q^{(i)}$, $i = 1, \dots k$, сосредоточенных в узлах $x^{(i)}$, внутренних для области решения $\Omega \subset R^n$. Установлено существование решения. Способ доказательства одновременно позволяет находить приблеженное решение.

Закон фильтрации(связь между градиентом давления λ и потоком G) считаем неоднородным по пространству и изотропным:

$$G(x, \lambda) \equiv \frac{h(x, |\lambda|)}{|\lambda|}\, \lambda : \Omega \times R^n \to R^n,$$

$$h(x, s) \equiv a(x)[\, s - \mu(x)\,]_+\, ; \quad [\, s\,]_+ \equiv \begin{cases} 0\,, & s < 0, \\ s\,, & s \geq 0, \end{cases}$$

функции $\mu, a : \Omega \to R$ измеримы и ограничены:

$$0 \leq \mu(x) \leq \overline{\mu}, \quad 0 < a_{min} \leq a(x) \leq a_{max}.$$

Границу $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\mathrm{mes}\, \Gamma_1 \neq 0$ области Ω считаем Липшиц-непрерывной. Для $x \in \Gamma_1$ выпонлено условие Дирихле $w(x) = w_{\gamma_1}(x)$, для $x \in \Gamma_2$ условие Неймана $(G(x, \nabla w), \nu(x)) + \sigma(x) w = w_{\gamma_2}(x)$. Вариационная задача имеет следующий вид:

$$\int\limits_\Omega (G(x, \nabla w), \nabla \eta)\, dx + \int\limits_\Omega g_0(x) w \eta dx + \int\limits_{\Gamma_2} \sigma(x) w \eta dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} q^{(i)}\, \eta(x - x^{(i)}) + \int\limits_{\Gamma_2} w_{\gamma_2}(x) \eta dx,\ \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2).$$

Функция $g_0(x)$ неотрецательна и ограничена.

Функция $a(x)$ принадлежит весовому пространству в точках сосредоточения источников, а именно, для $i = 1, \dots k$ имееют место включения

$$\exists\, \alpha_i \in L_2(\Omega) : \alpha_i(x) \equiv |x - x^{(i)}|^{1-n}(a(x) - a^{(i)}).$$

Для решения рассмотренной задачи получено аддитивное представление $w = v + u + \Phi$ с явным выделением особенности пораждненой источниками [2]:

$$\Phi(x) \equiv \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x)\ : \varphi_i(x) \equiv \frac{q^{(i)}}{a^{(i)}}\, \phi_n(x - x^{(i)}).$$

Здесь функция ϕ_n – фундаментальное решение оператора Лапласа: $\phi_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln(|x|)$ и $\phi_3(x) = -\frac{1}{4\pi |x|}$.

Функция $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ – единственное решение линейной задачи с дивиргентной правой частью

$$-\operatorname{div}(a(x) \nabla u(x)) = -\operatorname{div} F, \quad x \in \Omega,$$

$$F = \nabla \left[\sum_{i=1}^{k} q_i\, \phi_n(x - x^{(i)}) \right] - a(x) \nabla \Phi(x).$$

Функцию v находим из краевой задачи для нелинейного уравнения с вырождением по градиенту:

$$\int\limits_\Omega (G(x, \nabla(v(x) + \widetilde{w}(x))) - a(x) \nabla \widetilde{w}(x), \nabla \eta(x))\, dx +$$

$$+ \int\limits_\Omega g_0(x)(v(x) + \widetilde{w}(x)) \eta(x) dx + \int\limits_{\Gamma_2} \sigma(x) v(x) \eta(x) dx = 0,$$

для любого $\eta \in C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2)$, здесь $\widetilde{w} = u + \Phi$.

Вариационная задача для v исследована методом теории монотонных операторов [3]. Множество решений непусто и слабо замкнуто в гильбертовом пространстве $V \equiv \{v \in W_2^{(1)}(\Omega) : v(x) = 0,\ x \in \Gamma_1\}$.

Таким образом решение исходной задачи найдено, особенность связанная с точечными источниками выделена явно в виде функции $\Phi \in W_1^{(1)}(\Omega)$, а функции u, v из пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Научный руководитель — д.ф.-м.н. Задворнов О. А.

Список литературы

[1] Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах / М.: Недра, 1984. 211 с.

[2] Задворнов О. А., Трифонова Г. О. Смешанная краевая задача для уравнения монотонного типа с младшим слагаемым при наличии точечных источников в правой части// Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, № 2. С. 173–186.

[3] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / М.: Мир, 1978. 336 с.